LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022
CORRIGÉ – BARÈME

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	CB	*Date de l'épreuve :*	30.05.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 11:25

Question I (8 + (3+4) + 4 = 19 points)

1. $z^6 + (i-1)\,z^3 + 2 - 2i = 0$ (E)

   Posons $t = z^3$. Alors l'équation (E) devient : $t^2 + (i-1)t + 2 - 2i = 0$ (E').

   $\Delta = (i-1)^2 - 4(2-2i) = -8 + 6i.$

   Soit $\delta = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & (1) \\ 2xy = 6 & (2). \\ x^2 + y^2 = 10 & (3) \end{cases}$

   (3) + (1) : $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

   (3) – (1) : $2y^2 = 18 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$

   (2) : x et y sont de même signe — Donc : $\delta = \pm(1+3i)$

   Les solutions de (E') sont : $\frac{1 - i \pm (1+3i)}{2} = \begin{cases} -2i \\ 1+i \end{cases}$.

   Les racines cubiques complexes de $-2i = 2\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ sont les $z_k = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi}{3}\right)$ $(k \in \{0;1;2\})$:

   $z_0 = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $z_1 = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, $z_2 = \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

   Les racines cubiques complexes de $1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sont les $z_k{}' = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi}{3}\right)$ $(k \in \{0;1;2\})$:

   $z_0{}' = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $z_1{}' = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2{}' = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{17\pi}{12}\right)$

   Donc : $S_{\mathbb{C}} = \left\{\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right); \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right); \sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right); \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right); \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right); \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right\}$.

2. $P(z) = z^2 - (\beta - \alpha i)z + \alpha(1-2i)$

   a. $P(i) = -1 - i\beta - \alpha + \alpha - 2i\alpha = -2i\alpha - i\beta - 1$

      $P(1) = 1 - \beta + i\alpha + \alpha - 2i\alpha = (1-i)\alpha - \beta + 1$

      Donc on a : $\begin{cases} -2i\alpha - i\beta - 1 = 3 \mid \cdot i \\ (1-i)\alpha - \beta + 1 = 2 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 4i & (1) \\ (1-i)\alpha - \beta = 1 + i & (2) \end{cases}$

      (1) + (2) : $(3-i)\alpha = 1 + 5i \Leftrightarrow \alpha = \frac{1+5i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} \Leftrightarrow \alpha = \frac{-2+16i}{10} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$

      Dans (1) : $\beta = 4i - 2\alpha = 4i + \frac{2}{5} - \frac{16}{5}i = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

   b. $P(2+i) = (2+i)^2 - (2+i)(2+i) + \alpha i(2+i) + \alpha(1-2i) = 0$

      La somme des racines de $P(z)$ vaut $2 + i - \alpha i$. Comme $2+i$ est une racine, l'autre est $-\alpha i$.

      Donc : $S_{\mathbb{C}} = \{2+i; -\alpha i\}$.

      Pour obtenir un triangle isocèle rectangle en O, il faut que les points-images des racines soient images l'un de l'autre par une rotation d'amplitude $\pm\frac{\pi}{2}$.

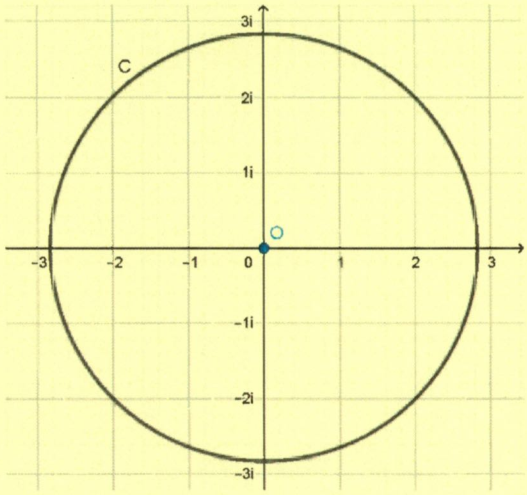
      Donc : $-\alpha i = (2+i)\cdot\operatorname{cis}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\alpha i = (2+i)\cdot(\pm i) \Leftrightarrow \alpha = \mp(2+i)$

3. Soit $z = x + yi$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors on a :

   $|z-2| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-4| \Leftrightarrow |(x-2)+yi| = \frac{\sqrt{2}}{2}|(x-4)+yi| \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{2}\left[(x-4)^2 + y^2\right]$

   $\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 + 2y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8.$

   L'ensemble recherché E est le cercle de centre $O(0)$ et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.



Question II ((3+2+2) + (2+3+4) = 16 points)

1. La catégorie d'épreuves Ω pour ce jeu contient tous les couples de résultats possibles pour un jet de dé et un choix de boule, donc $4 \cdot 3 = 12$ résultats équiprobables.
   a. Dressons un tableau des gains en fonction des résultats possibles, d'où on tire la loi de probabilité pour la variable aléatoire X.

Boule \ dé	1	2	3	4
3	-1	1	4	1
4	-1	1	1	4
5	-1	1	1	1

x_i	-1	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

   b. $E(X) = \frac{3}{12} \cdot (-1) + \frac{7}{12} \cdot 1 + \frac{2}{12} \cdot 4 = \frac{12}{12} = 1$
   $V(X) = \frac{3}{12} \cdot (-1-1)^2 + \frac{7}{12} \cdot (1-1)^2 + \frac{2}{12} \cdot (4-1)^2 = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
   c. Soit x la valeur recherchée, qui doit remplacer le 4 dans la première ligne du tableau donnant la loi de probabilité obtenue en a. L'espérance pour cette nouvelle loi de probabilité vaut :
   $E(X) = \frac{3}{12} \cdot (-1) + \frac{7}{12} \cdot 1 + \frac{2}{12} \cdot x = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x.$
   Le jeu est équilibré $\Leftrightarrow E(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x = 0 \Leftrightarrow x = -2.$
   Pour un jeu équilibré, il faut une perte de 2€ si le dé et la boule affichent le même numéro.

2. Chaque lancer de l'aiguille est une épreuve de Bernoulli avec probabilité de succès $p = \frac{2r}{\pi}$.
   a. Le lanceur répète n fois la même épreuve de Bernoulli, et les lancers sont indépendants les uns des autres. Comme X compte le nombre de succès de ces épreuves, X suit la loi binomiale de paramètres n, $p = \frac{2r}{\pi}$ et $q = 1 - \frac{2r}{\pi}$. Donc : $P(X = k) = C_n^k \left(\frac{2r}{\pi}\right)^k \left(1 - \frac{2r}{\pi}\right)^{n-k}$ avec $k \in \{1;\cdots;n\}$.
   b. On prend $r = 1$ et on cherche n tel que $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$. On a :
   $P(X \geq 1) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0{,}05 \Leftrightarrow C_n^0 \left(\frac{2}{\pi}\right)^0 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^n \leq 0{,}05 \Leftrightarrow n \geq \log_{1-\frac{2}{\pi}} 0{,}05 \approx 2{,}96$,
   car $\log_{1-\frac{2}{\pi}}$ est une bijection strictement décroissante.
   Il faut donc lancer l'aiguille au moins 3 fois.
   c. On prend $n = 10$ et on cherche r tel que $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$. On a :
   $P(X \geq 1) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0{,}05 \Leftrightarrow C_n^0 \left(\frac{2r}{\pi}\right)^0 \left(1 - \frac{2r}{\pi}\right)^{10} \leq 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - \frac{2r}{\pi} \leq \sqrt[10]{0{,}05}$
   $\Leftrightarrow \frac{2r}{\pi} \geq 1 - \sqrt[10]{0{,}05} \Leftrightarrow r \geq \frac{\pi}{2}(1 - \sqrt[10]{0{,}05}) \approx 0{,}407.$
   L'aiguille doit mesurer au moins 0,407 unité.

Question III (3 + 8 = 11 points)

1. $\mathcal{C} \equiv 4y^2 - 9x^2 = 36 \equiv \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$.
   C'est une hyperbole centrée à l'origine $O(0;0)$ et d'axe focal (Oy), avec $a = 2$ et $b = 3$.
   Donc $c = \sqrt{13}$, l'excentricité est $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ et les foyers sont $F(0;\sqrt{13})$ et $F'(0;\ -\sqrt{13})$.
   Comme $\frac{b^2}{c} = \frac{9}{\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{13}$, les directrices associées sont $d \equiv y = \frac{9\sqrt{13}}{13}$ et $d' \equiv y = -\frac{9\sqrt{13}}{13}$.
   Comme $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$, les asymptotes sont $a_1 \equiv y = \frac{3}{2}x$ et $a_2 \equiv y = -\frac{3}{2}x$.
2. Soit $M(x_0;y_0)$, alors on a : $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 9x_0^2 - 4y_0^2 + 36 = 0$ (1).
   La tangente à $\mathcal{C}$ en M est $t_M \equiv 9x_0x - 4y_0y + 36 = 0$ (2).
   $A(-2;1) \in t_M \Leftrightarrow -18x_0 - 4y_0 + 36 = 0 \Leftrightarrow y_0 = -\frac{9}{2}x_0 + 9 \Leftrightarrow y_0 = -\frac{9}{2}(x_0 - 2)$.
   Dans (1) : $9x_0^2 - 4 \cdot \frac{81}{4}(x_0 - 2)^2 + 36 = 0 \quad |:9 \Leftrightarrow x_0^2 - 9\left(x_0^2 - 4x_0 + 4\right) + 4 = 0$
   $\Leftrightarrow -8x_0^2 + 36x_0 - 32 = 0 \quad |:(-4) \quad \Leftrightarrow 2x_0^2 - 9x_0 + 8 = 0 \qquad \Delta = 81 - 64 = 17$
   Les valeurs possibles pour x_0 sont $\frac{9-\sqrt{17}}{4}$ et $\frac{9+\sqrt{17}}{4}$.
   Pour $x_0 = \frac{9-\sqrt{17}}{4}$: $y_0 = -\frac{9}{2}\left(\frac{9-\sqrt{17}}{4} - 2\right) = \frac{9(-1+\sqrt{17})}{8}$, donc $T_1\left(\frac{9-\sqrt{17}}{4};\ \frac{9(-1+\sqrt{17})}{8}\right)$ est le point de tangence de la tangente $t_{T_1} \equiv \frac{9(9-\sqrt{17})}{4}x - \frac{9(-1+\sqrt{17})}{2}y + 36 = 0$.
   Pour $x_0 = \frac{9+\sqrt{17}}{4}$: $y_0 = -\frac{9}{2}\left(\frac{9+\sqrt{17}}{4} - 2\right) = \frac{9(-1-\sqrt{17})}{8}$, donc $T_2\left(\frac{9+\sqrt{17}}{4};\ \frac{9(-1-\sqrt{17})}{8}\right)$ est le point de tangence de la tangente $t_{T_2} \equiv \frac{9(9+\sqrt{17})}{4}x - \frac{9(-1-\sqrt{17})}{2}y + 36 = 0$.
   De (2), on obtient que la pente de t_M est $\frac{9x_0}{4y_0}$. Or :
   $$\frac{9 \cdot \frac{9-\sqrt{17}}{4}}{4 \cdot \frac{9(-1+\sqrt{17})}{8}} \cdot \frac{9 \cdot \frac{9+\sqrt{17}}{4}}{4 \cdot \frac{9(-1-\sqrt{17})}{8}} = \frac{(9-\sqrt{17})(9+\sqrt{17})}{4(-1+\sqrt{17})(-1-\sqrt{17})} = \frac{64}{4 \cdot (-16)} = -1,$$
   donc t_{T_1} et t_{T_2} sont perpendiculaires.

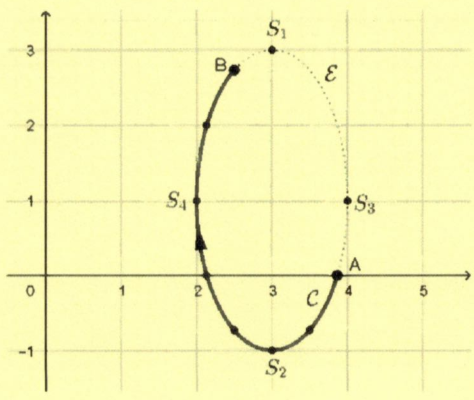
Question IV (5 points)

$\begin{cases} x = 3 + \cos t \\ y = 1 - 2\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = x - 3 \\ \sin t = \frac{1-y}{2} \end{cases}$, ce qui implique que $(x-3)^2 + \left(\frac{1-y}{2}\right)^2 = 1$.

Donc $\mathcal{C}$ est une partie de la courbe $\mathcal{E} \equiv (x-3)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$, qui est l'ellipse de centre $C(3;1)$, d'axe focal vertical $f \equiv x = 3$, avec $a = 1$ et $b = 2$, et de sommets $S_1(3;3)$, $S_2(3;-1)$, $S_3(4;1)$, $S_4(2;1)$.

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
$3 + \cos t$	3,87	3,5	3	2,5	2,13	2	2,13	2,5
$1 - 2\sin t$	0	−0,73	−1	−0,73	0	1	2	2,73

Plus précisément, $\mathcal{C}$ est la partie de $\mathcal{E}$ allant du point $A\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ vers le point $B\left(\frac{5}{2};1+\sqrt{3}\right)$ dans le sens négatif.



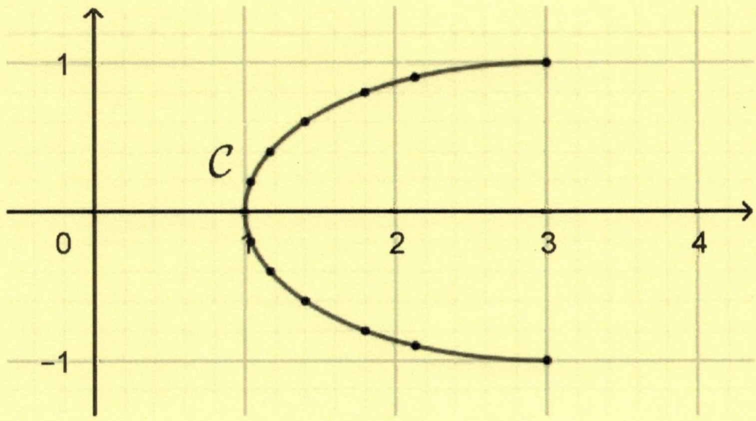
Question V (3 + 6 = 9 points)

1. La courbe $\mathcal{C}$ est une parabole de foyer $A\ (2;0)$ et de directrice $d \equiv x = 5$.
   $P(x;y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow PA = \mathrm{d}(P, d) \Leftrightarrow PA^2 = [\mathrm{d}(P, d)]^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = (x-5)^2$
   $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow y^2 = -6x + 21 \Leftrightarrow y^2 = -6\left(x - \frac{7}{2}\right)$
   Donc : $\mathcal{C} \equiv y^2 = -6\left(x - \frac{7}{2}\right)$, son sommet est $S\left(\frac{7}{2}; 0\right)$ et son paramètre est $p = 3$.

2. C.E. : $1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$
   $x = 3 - 2\sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow x - 3 = -2\sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow \left[(x-3)^2 = 4(1 - y^2) \text{ et } x \leq 3\right]$
   $\Leftrightarrow \left[(x-3)^2 + 4y^2 = 4 \text{ et } x \leq 3\right] \Leftrightarrow \left[\frac{(x-3)^2}{4} + y^2 = 1 \text{ et } x \leq 3\right]$

   Donc $\mathcal{C}$ est une partie de la courbe $\mathcal{E} \equiv \frac{(x-3)^2}{4} + y^2 = 1$, qui est l'ellipse de centre $C(3;0)$, d'axe focal (Ox), avec $a = 2$ et $b = 1$. En fait, $\mathcal{C}$ est la demi-ellipse située à gauche du petit axe $d \equiv x = 3$.

y	0	$\pm 0{,}2$	$\pm 0{,}4$	$\pm 0{,}6$	$\pm 0{,}8$	$\pm 0{,}9$	± 1
x	1	1,04	1,17	1,4	1,8	2,13	3



Question VI (9 points)

L'ellipse $\mathcal{E}$ est centrée à l'origine du repère et d'axe focal horizontal. On pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; alors $F(c;0)$ et $d \equiv x = \frac{a^2}{c}$.
Soit $M(x_0;y_0) \in \mathcal{E}$. La tangente à $\mathcal{E}$ en M est $t_M \equiv b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0$.
Soit $P \in d$. Alors $P\left(\frac{a^2}{c};k\right)$ pour un réel k, et
$P \in t_M \Leftrightarrow b^2x_0 \cdot \frac{a^2}{c} + a^2y_0k - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow b^2x_0 + cky_0 - b^2c = 0\ (1)$.
Dès lors, les coordonnées des deux points distincts S et T vérifient la relation (1), donc la corde de contact (ST) vérifie $(ST) \equiv b^2x + cky - b^2c = 0$.
Vérifions que $F(c;0) \in (ST)$: $b^2c + ck \cdot 0 - b^2c = 0$.
Donc, les points S, T et F sont bien alignés.