LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	CB	*Date de l'épreuve :*	30.05.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 11:25
		Numéro du candidat :	

Instructions

- L'élève répond à toutes les questions de la partie obligatoire.
- L'élève répond à exactement 1 question de la partie au choix. Il indique obligatoirement son choix en marquant d'une croix la case appropriée ci-dessous.

Seule la réponse correspondant à la question choisie par l'élève sera évaluée. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix renseigné sur la page de garde la partie au choix est cotée à 0 point.

Partie obligatoire (51 points)			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Obligatoire**
I	**19**	**Nombres complexes**	**X**
II	**16**	**Combinatoire, lois de probabilité**	**X**
III	**11**	**Coniques, applications des coniques**	**X**
IV	**5**	**Trajectoires**	**X**
Partie au choix (9 points)			
Choisissez 1 question parmi les 2 suivantes et indiquez votre choix avec un X			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Choix du candidat**
V	**9**	**Coniques, applications des coniques**	
VI	**9**	**Coniques, applications des coniques**	

Partie obligatoire (51 points)

Question I (8 + (3+4) + 4 = 19 points) – question obligatoire

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante et donner ses solutions sous forme trigonométrique :
$$z^6 + (i-1)\,z^3 + 2 - 2i = 0.$$
2. Soit $P(z) = z^2 - (\beta - \alpha i)z + \alpha(1-2i)$, où α et β sont des paramètres complexes.
   a. Déterminer α et β si on sait que $P(i) = 3$ et que le reste de la division de $P(z)$ par $z-1$ est $2+i$.
   b. On prend maintenant $\beta = 2+i$ et α est toujours un paramètre complexe. Vérifier que $2+i$ est une racine de $P(z)$ puis résoudre l'équation $P(z) = 0$. Déterminer ensuite les valeurs du paramètre α pour lesquelles les points-images des racines de $P(z)$ forment avec l'origine O du plan de Gauss un triangle isocèle rectangle en O.
3. Déterminer l'ensemble E des nombres complexes z tels que $|z-2| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-4|$, puis représenter l'ensemble E dans le plan de Gauss (unité : 1 cm).

Question II ((3+2+2) + (2+3+4) = 16 points) – question obligatoire

1. Pour un jeu, on utilise un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4, ainsi qu'une urne contenant trois boules numérotées 3, 4 et 5. Le joueur lance le dé puis tire une boule de l'urne :
   - si le résultat du dé est 1, le joueur perd 1€;
   - si le dé et la boule affichent le même numéro, le joueur gagne 4€;
   - dans tous les autres cas, le joueur gagne 1€.

   On note X la variable aléatoire qui comptabilise le gain du joueur.
   a. Établir la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
   c. Déterminer quel doit être le gain ou la perte dans le cas où le dé et la boule affichent le même numéro pour que le jeu soit équilibré, si les gains/pertes des autre situations restent inchangés.
2. Des droites parallèles espacées entre elles d'une unité sont dessinées sur le sol. Il est connu que si on lance au hasard une aiguille de longueur r unité (où $r \in \,]0;1]$) sur le sol, alors la probabilité pour que l'aiguille touche une de ces droites est $p = \frac{2r}{\pi}$. On lance n fois successivement la même aiguille sur le sol et on note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de lancers où l'aiguille touche une des droites.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. On prend $r = 1$. Combien de fois au moins faut-il lancer l'aiguille pour que la probabilité qu'elle touche une des droites au moins une fois dépasse 95% ?
   c. On lance 10 fois une aiguille de longueur r (où $r \in \,]0;1]$). Quelle est la valeur minimale de r (arrondie à 10^{-3} près) pour laquelle la probabilité que l'aiguille touche une des droites au moins une fois dépasse 95% ?

Question III (3 + 8 = 11 points) – question obligatoire

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit la courbe $\mathcal{C} \equiv 4y^2 - 9x^2 = 36$.

1. Identifier $\mathcal{C}$ et donner ses éléments caractéristiques (centre éventuel, excentricité, axe focal, foyer(s), directrice(s), asymptotes éventuelles).
2. Déterminer des équations cartésiennes des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de $A\,(-2;1)$ ainsi que les coordonnées des points de tangence. Montrer que ces tangentes sont perpendiculaires.

Question IV (5 points) – question obligatoire

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit la courbe $\mathcal{C}$ définie par la représentation paramétrique :

$$\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x = 3 + \cos t \\ y = 1 - 2\sin t \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right].$$

Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ et tracer la courbe (unité : 1 cm).

Partie au choix (9 points)

Question V (3 + 6 = 9 points) – question au choix

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit la courbe $\mathcal{C}$ définie comme le lieu des points du plan équidistants du point $A\,(2;0)$ et de la droite $d \equiv x = 5$. Établir l'équation cartésienne réduite de $\mathcal{C}$ et préciser sa nature ainsi que ses éléments caractéristiques (sommet, foyer, directrice, paramètre).
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit la courbe $\mathcal{C} \equiv x = 3 - 2\sqrt{1 - y^2}$. Identifier la courbe $\mathcal{C}$ et la tracer (unité : 2 cm).

Question VI (9 points) – question au choix

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit l'ellipse $\mathcal{E} \equiv b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, où $a > b > 0$. On note F le foyer de $\mathcal{E}$ d'abscisse positive, et d la directrice associée à F. Pour tout point P du plan extérieur à $\mathcal{E}$, on note S et T les points de tangence des deux tangentes à $\mathcal{E}$ issues de P. Démontrer que si $P \in d$, alors les points S, T et F sont alignés.

Examen de fin d'études secondaires Sections B, C, D, E, F

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\cos(-x) = \cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\tan(\pi + x) = \tan x$ $\tan(-x) = -\tan x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ $\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$