



DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
MATHEMATIQUES II	CB	Durée de l'épreuve : 08:15 - 12:25 Date de l'épreuve : 17/05/2022

Question 1 (5 + 5 + 4 = 14 points)

a) $\log_2 |1-2^x| \leq \log_2 12 - |x|$

C.E. $1-2^x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$(\forall x \in D = \mathbb{R}^*) :$

$\log_2 |1-2^x| \leq \log_2 12 - |x|$

$\Leftrightarrow \frac{\ln |1-2^x|}{\ln 2} \leq \frac{\ln 12}{\ln 2} - \frac{\ln 2^{|x|}}{\ln 2}$

$\Leftrightarrow \ln |1-2^x| + \ln 2^{|x|} \leq \ln 12$

$\Leftrightarrow \ln(|1-2^x| \cdot 2^{|x|}) \leq \ln 12$

$\Leftrightarrow |1-2^x| \cdot 2^{|x|} \leq 12 \quad (I)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ 1-2^x $	$1-2^x$	0	2^x-1

1°) cas : $x \in]-\infty; 0[$

$(I) \Leftrightarrow (1-2^x)2^{-x} \leq 12 \Leftrightarrow 2^{-x} - 1 \leq 12 \Leftrightarrow 2^{-x} \leq 13 \Leftrightarrow -x \ln 2 \leq \ln 13 \Leftrightarrow x \geq -\frac{\ln 13}{\ln 2}$

$S_1 = \left[-\frac{\ln 13}{\ln 2}; 0[$

2°) cas : $x \in]0; +\infty[$

$(I) \Leftrightarrow (2^x - 1)2^x \leq 12 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow (2^x + 3)(2^x - 4) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq 2^x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$

$S_2 =]0; 2]$

$S = S_1 \cup S_2 = \left[-\frac{\ln 13}{\ln 2}; 0[\cup]0; 2]$

b) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x^{\ln x}} \Leftrightarrow e^{\sqrt{x} \cdot \ln x} = e^{\ln x \cdot \ln \sqrt[3]{x}} \quad (*)$

C.E. $x > 0$

Tableau des variations

x	0	$\frac{4}{9}$	$+\infty$
$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}-2}{6x}$		-	0
$f(x)$		\searrow	$\underbrace{\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \ln \frac{4}{9}}_{\approx 0,94}$
			\nearrow

Donc $(\forall x \in]0; +\infty[) : f(x) > 0$

$e^{\sqrt{x} \cdot \ln x} = e^{\ln x \cdot \ln \sqrt[3]{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot \ln x = \ln x \cdot \ln \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \ln x \left[\sqrt{x} - \frac{1}{3} \ln x \right] = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee \underbrace{\sqrt{x} - \frac{1}{3} \ln x}_{> 0 \quad (\forall x \in]0; +\infty[)} = 0$

Par conséquent (*) admet une seule solution à savoir $x = 1$ et $S = \{1\}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x})^{\sqrt{x}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x})^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1+e^{-x})}{\frac{1}{\sqrt{x}}}}$ (Forme indéterminée : " $\infty \cdot 0$ ")

Limite de l'exposant

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}}{\frac{-1}{2x\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{-x}x^{\frac{3}{2}}}{1+e^{-x}} = 0$

C.à.p. : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}x^{\frac{3}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{4}}{x^2 e^x} = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x})^{\sqrt{x}} = e^0 = 1$

Question 2 (2 + 4 + 2 + 4 + 4 = 16 points)

a) C.E. $x > 0$

$\text{Dom } f = \text{Dom } f' = \text{Dom } f'' =]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\ln^2 x - 5\ln x + 2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\ln x}_{\rightarrow -\infty} \underbrace{\left(2\ln x - 5 + \frac{2}{\ln x}\right)}_{\rightarrow -\infty} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\ln x}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{\left(2\ln x - 5 + \frac{2}{\ln x}\right)}_{\rightarrow +\infty} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\ln^2 x}{x} - \frac{5\ln x}{x} + \frac{2}{x} \right) = 0$

C.à.p. : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0$

Conclusions :

C_f admet une A.V. $\equiv x = 0$ (à droite) et une B.P.D. dont la direction asymptotique est celle de (Ox) .

b) $(\forall x \in]0; +\infty[) : f'(x) = 4\ln x \cdot \frac{1}{x} - 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4\ln x - 5}{x}$

Tableau des variations

x	0	$e^{\frac{5}{4}}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow -\frac{9}{8} \nearrow$	$+\infty$

$(\forall x \in]0; +\infty[) : f''(x) = \frac{\frac{4}{x} \cdot x - (4\ln x - 5)}{x^2} = \frac{9 - 4\ln x}{x^2}$

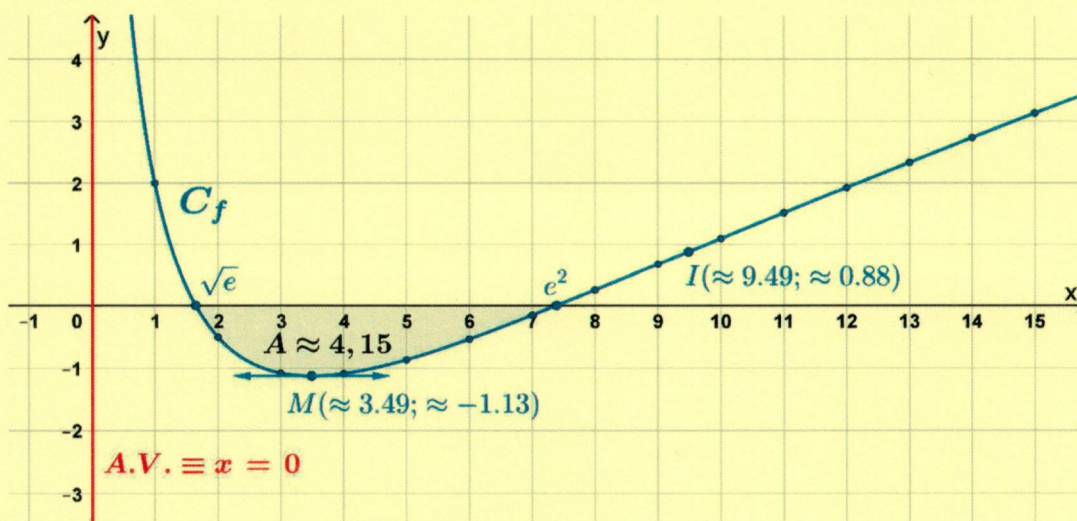
Tableau de concavité

x	0	$e^{\frac{9}{4}}$	$+\infty$
$f''(x)$		+ 0 -	
C_f		\cup P.I. \cap	

$I\left(e^{\frac{9}{4}}; \frac{7}{8}\right)$ est le seul point d'inflexion de C_f .

c) Représentation graphique

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f(x)	2	-0,5	-1,1	-1,1	-0,9	-0,5	-0,2	0,3	0,7	1,1	1,5	1,9	2,3	2,7	3,1



d) Équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a de C_f

$$t_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4\ln a - 5}{a}(x - a) + 2\ln^2 a - 5\ln a + 2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4\ln a - 5}{a}x + 2\ln^2 a - 9\ln a + 7$$

$$O(0;0) \in t_a \Leftrightarrow 0 = \frac{4\ln a - 5}{a} \cdot 0 + 2\ln^2 a - 9\ln a + 7 \Leftrightarrow \ln a = 1 \vee \ln a = \frac{7}{2} \Leftrightarrow a = e \vee a = e^{\frac{7}{2}}$$

Il y a deux tangentes à C_f passant par l'origine, à savoir :

$$t_e : y = f'(e)x \Leftrightarrow y = \frac{4\ln e - 5}{e}x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{e}x$$

$$t_{\frac{7}{2}} : y = f'\left(e^{\frac{7}{2}}\right)x \Leftrightarrow y = \frac{4\ln e^{\frac{7}{2}} - 5}{e^{\frac{7}{2}}}x \Leftrightarrow y = \frac{9}{e^{\frac{7}{2}}}x$$

e) $C_f \cap (Ox)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln^2 x - 5\ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow (2\ln x - 1)(\ln x - 2) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \vee \ln x = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{e} \vee x = e^2$$

$$C_f \cap (Ox) = \{A(\sqrt{e}; 0); B(e^2; 0)\}$$

$$A = -\int_{\sqrt{e}}^{e^2} (2\ln^2 x - 5\ln x + 2) dx = 2 \underbrace{\int_{\sqrt{e}}^{e^2} \ln^2 x dx}_{A_1} - 5 \underbrace{\int_{\sqrt{e}}^{e^2} \ln x dx}_{A_2} + 2 \underbrace{\int_{\sqrt{e}}^{e^2} dx}_{A_3}$$

Calcul de A_1 et A_2 par parties

$$\begin{array}{l|l} u_1(x) = \ln^2 x & v_1(x) = x \\ \hline u_1'(x) = \frac{2\ln x}{x} & v_1'(x) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} u_2(x) = \ln x & v_2(x) = x \\ \hline u_2'(x) = \frac{1}{x} & v_2'(x) = 1 \end{array}$$

$$A_1 = \left[x \ln^2 x \right]_{\sqrt{e}}^{e^2} - 2 \int_{\sqrt{e}}^{e^2} \ln x dx = \frac{\sqrt{e}}{4} - 4e^2 - 2 \left\{ \left[x \ln x \right]_{\sqrt{e}}^{e^2} - \int_{\sqrt{e}}^{e^2} x dx \right\} = \frac{5\sqrt{e}}{4} - 2e^2$$

$$A_2 = \left[x \ln x - x \right]_{\sqrt{e}}^{e^2} = -\frac{\sqrt{e}}{2} - e^2$$

$$A_3 = \left[x \right]_{\sqrt{e}}^{e^2} = \sqrt{e} - e^2$$

$$A = 2A_1 - 5A_2 + 2A_3 = 2\left(\frac{5\sqrt{e}}{4} - 2e^2\right) - 5\left(-\frac{\sqrt{e}}{2} - e^2\right) + 2(\sqrt{e} - e^2) = \boxed{7\sqrt{e} - e^2 \text{ u.a.}} \approx 4,15 \text{ u.a.}$$

Question 3 (6 points)

$$f_m(x) = \ln|e^x - m| \quad (m \in \mathbb{R}^*)$$

1°) Domaine de définition

Si $m < 0$, alors $\text{Dom } f_m = \mathbb{R}$

Si $m > 0$, alors $\text{Dom } f_m = \mathbb{R} \setminus \{\ln m\}$

2°) Limites et asymptotes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left| \underbrace{e^x}_{\rightarrow 0} - m \right| = \ln|m|$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \underbrace{e^x}_{\rightarrow +\infty} - m \right| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|e^x - m|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|e^x(1 - me^{-x})|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x + \ln|1 - me^{-x}|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \overbrace{\ln|1 - \underbrace{me^{-x}}_{\rightarrow 0}|}}_x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_m(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\ln|1 - \underbrace{me^{-x}}_{\rightarrow 0}|}_{\rightarrow 0} = 0$$

C_{f_m} admet une AHG $\equiv y = \ln|m|$ et une AOD $\equiv y = x$.

$$\forall m \in \mathbb{R}_+^* : \lim_{x \rightarrow \ln m} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow \ln m} \ln \left| \underbrace{e^x}_{\rightarrow m} - m \right| = -\infty$$

C_{f_m} admet une AV $\equiv x = \ln m$ si $m \in \mathbb{R}_+^*$.

3°) Dérivée première et variations

3.1°) $m < 0$

$\text{Dom } f_m = \text{Dom } f_m' = \mathbb{R}$

$$f_m'(x) = \frac{e^x}{e^x - m} > 0$$

Tableau des variations

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_m'(x)$		+
$f_m(x)$	$\ln m $	$\nearrow +\infty$

3.2°) $m > 0$

$\text{Dom } f_m = \text{Dom } f_m' = \mathbb{R} \setminus \{\ln m\}$

$$f_m'(x) = \frac{e^x}{e^x - m} \neq 0 ; f_m'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > m \Leftrightarrow x > \ln m$$

Tableau des variations

x	$-\infty$	$\ln m$	$+\infty$		
$f_m'(x)$		-		+	
$f_m(x)$	$\ln m$	$\searrow -\infty$		$-\infty$	$\nearrow +\infty$

Question 4 (6 points)

$\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\frac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 + 9} = \frac{-(x^2 + 9) - 3x + 13}{x^2 + 9} = -1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 9} + \frac{13}{x^2 + 9} = -1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 9} + \frac{13}{3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}$$

$$\int \frac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 + 9} dx = \int \left(-1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 9} + \frac{13}{3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} \right) dx$$

$$= -x - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 9) + \frac{13}{3} \arctan \frac{x}{3} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$C_f \cap (Ox)$

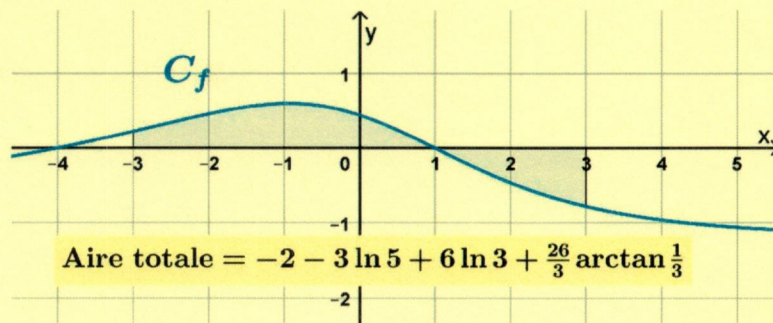
$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 + 9} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$$

Tableau des signes

x	$-\infty$	-4	-3	1	3	$+\infty$
$\frac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 + 9}$		-	0	+		+
		-	0	-		-

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \int_{-3}^1 \frac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 + 9} dx - \int_1^3 \frac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 + 9} dx \\ &= \left[-x - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 9) + \frac{13}{3} \arctan \frac{x}{3} \right]_{-3}^1 - \left[-x - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 9) + \frac{13}{3} \arctan \frac{x}{3} \right]_1^3 \\ &= -1 - \frac{3}{2} \ln(1^2 + 9) + \frac{13}{3} \arctan \frac{1}{3} - \left(-(-3) - \frac{3}{2} \ln((-3)^2 + 9) + \frac{13}{3} \arctan \frac{-3}{3} \right) \\ &\quad - \left(-3 - \frac{3}{2} \ln(3^2 + 9) + \frac{13}{3} \arctan \frac{3}{3} \right) + \left(-1 - \frac{3}{2} \ln(1^2 + 9) + \frac{13}{3} \arctan \frac{1}{3} \right) \\ &= -1 - \frac{3}{2} \ln 10 + \frac{13}{3} \arctan \frac{1}{3} - 3 + \frac{3}{2} \ln 18 + \frac{13}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - 3 + \frac{3}{2} \ln 18 - \frac{13}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - 1 - \frac{3}{2} \ln 10 + \frac{13}{3} \arctan \frac{1}{3} \\ &= -2 - 3 \ln 10 + 3 \ln 18 + \frac{26}{3} \arctan \frac{1}{3} \\ &= -2 - 3 \ln \frac{5}{9} + \frac{26}{3} \arctan \frac{1}{3} \\ &= -2 - 3 \ln 5 + 6 \ln 3 + \frac{26}{3} \arctan \frac{1}{3} \\ &\approx 2,55 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Figure pas demandée



Question 5 (4 + 4 = 8 points)

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \int (1 + \cos x)^4 (1 - \cos x)^3 dx \\
 &= \int (1 - \cos^2 x)^3 (1 + \cos x) dx \\
 &= \int (\sin^2 x)^3 (1 + \cos x) dx \\
 &= \int \sin^6 x (1 + \cos x) dx \\
 &= \int \sin^6 x dx + \int \cos x \sin^6 x dx \\
 &= \int \left(-\frac{1}{32} \cos 6x + \frac{3}{16} \cos 4x - \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{5}{16} \right) dx + \frac{1}{7} \sin^7 x \\
 &= -\frac{1}{192} \sin 6x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{15}{64} \sin 2x + \frac{5}{16} x + \frac{1}{7} \sin^7 x + c \quad (c \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Linéarisation de $\sin^6 x$

$$\begin{aligned}
 \sin^6 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^6 \\
 &= -\frac{1}{64} (e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{6ix}) \\
 &= -\frac{1}{32} \frac{e^{6ix} + e^{-6ix}}{2} + \frac{3}{16} \frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} - \frac{15}{32} \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + \frac{5}{16} \\
 &= -\frac{1}{32} \cos 6x + \frac{3}{16} \cos 4x - \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{5}{16}
 \end{aligned}$$

b) Posons : $F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ sur $]0;1[$.

1^{ère} méthode

Changement de variable : $x = \sin t$

$$t = \sin^{-1} x ; dx = \cos t dt ; 0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \frac{\cos t dt}{\sin t \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t \text{ car } 0 < t < \frac{\pi}{2}}} = \int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} dt = \int \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt - \int \frac{-\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} dt \\
 &= \ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{t}{2} \right| + c = \ln \frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} + c = \ln \left(\tan \frac{t}{2} \right) + c = \ln \left(\tan \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} x \right) \right) + c \quad (c \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln \left(\tan \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \right) \right) - \ln \left(\tan \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{1}{4} \right) \right) \right) \approx 0,746$$

2^{ième} méthode

Changement de variable : $x = \sqrt{1-t^2}$

$$t = \sqrt{1-x^2} ; dx = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} dt ; 0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < t < 1$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \frac{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} dt}{\sqrt{1-t^2} \cdot t} = - \int \frac{dt}{1-t^2} = - \int \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t}{(1-t)(1+t)} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t} dt \\
 &= -\frac{1}{2} \ln |1+t| + \frac{1}{2} \ln |1-t| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + c \quad (c \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{1-\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}}{1-\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \frac{1}{2} \ln \left[(7-4\sqrt{3})(31+8\sqrt{15}) \right] \approx 0,746$$

Question 6 (2 + 3 + 5 = 10 points)

a) C.E.

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$f(0) = (0^2 - 0)e^0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{x^2}_{\rightarrow 0} \underbrace{\ln(e^x - 1)}_{\rightarrow -\infty} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 e^x}{2 - 2e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(3x^2 + x^3)e^x}{-2e^x} = 0$$

Conclusion : $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, donc f est continue en 0.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1)e^x = -1 = f_g'(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 e^x}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2x + x^2)e^x}{-e^x} = 0 = f_d'(0)$$

Conclusion : $f_g'(0) \neq f_d'(0)$, donc f n'est pas dérivable en 0 et l'origine est un point anguleux de C_f .

OU C_f admet deux demi-tangentes à pentes distinctes à l'origine, donc O est un point anguleux de C_f .

c) $\forall x \in]-\infty; 0] : f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow (x^2 - x)e^x \geq (2x^2 + x)e^x \Leftrightarrow -x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$

Tableau des signes :

x	$-\infty$	-2	0
$f(x) - g(x)$		$-$	$0 \quad + \quad 0$

$$A = \int_{-2}^0 (-x^2 - 2x)e^x dx$$

Première intégration par parties

$$\begin{array}{l|l} u_1(x) = -x^2 - 2x & v_1(x) = e^x \\ u_1'(x) = -2x - 2 & v_1'(x) = e^x \end{array}$$

$$\int (-x^2 - 2x)e^x dx = (-x^2 - 2x)e^x - \int (-2x - 2)e^x dx = (-x^2 - 2x)e^x + 2 \int (x + 1)e^x dx$$

Deuxième intégration par parties

$$\begin{array}{l|l} u_2(x) = x + 1 & v_2(x) = e^x \\ u_2'(x) = 1 & v_2'(x) = e^x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int (-x^2 - 2x)e^x dx &= (-x^2 - 2x)e^x + 2(x + 1)e^x - \int e^x dx \\ &= (-x^2 - 2x + 2x + 2)e^x - e^x + c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ &= -x^2 e^x + c \end{aligned}$$

$$A = \left[-x^2 e^x \right]_{-2}^0 = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0,54$$

Question 7 (10 points)

D'après la figure, il semble que le seul point d'intersection de C et de P dans le 1^{er} quadrant est $I(1;2)$.

Contrôle :

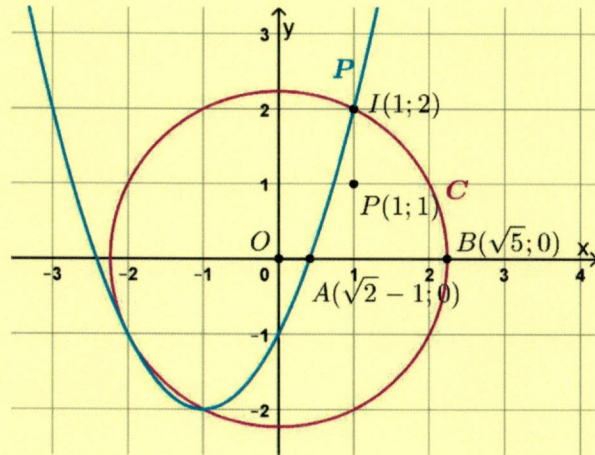
$$1^2 + 2^2 = 5 \text{ et } 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2$$

$P \cap (Ox)$

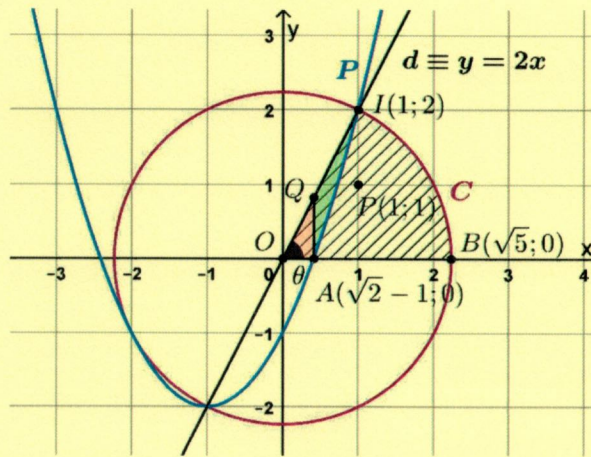
$$x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = x_A = -1 + \sqrt{2} \vee x = -1 - \sqrt{2}$$

$$[\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8 ; \sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}]$$

$$A(\sqrt{2} - 1; 0)$$



1^{ère} méthode



$$\theta = \tan^{-1} \widehat{BOI} = \tan^{-1} 2$$

$$\text{Aire} = \text{aire}(\text{secteur circulaire } \widehat{OBI}) - [\text{OAQ}] - \int_{\sqrt{2}-1}^1 (2x - (x^2 + 2x - 1)) dx$$

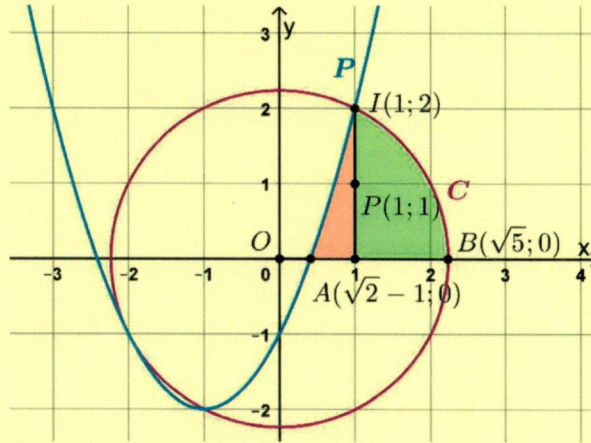
$$= \frac{(\sqrt{5})^2 \cdot \tan^{-1} 2}{2} - \frac{(\sqrt{2}-1) \cdot (2\sqrt{2}-2)}{2} - \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{\sqrt{2}-1}^1$$

$$= \frac{5}{2} \tan^{-1} 2 - (3 - 2\sqrt{2}) - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{5}{2} \tan^{-1} 2 + \frac{4\sqrt{2}-7}{3}$$

$$\approx 2,32 \text{ u.a.}$$

2^e méthode



$$\text{Aire} = \underbrace{\int_{\sqrt{2}-1}^1 (x^2 + 2x - 1) dx}_{A_1} + \underbrace{\int_1^{\sqrt{5}} \sqrt{5-x^2} dx}_{A_2}$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x \right]_{\sqrt{2}-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(\frac{5-4\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{4\sqrt{2}-4}{3} \text{ u.a.}$$

$$A_2 = \int_1^{\sqrt{5}} \sqrt{5-x^2} dx = \sqrt{5} \int_1^{\sqrt{5}} \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} dx$$

Changement de variable :

$$\frac{x}{\sqrt{5}} = \sin t \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \sin t ; \text{ donc : } dx = \sqrt{5} \cos t dt$$

$$1 \leq x \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} \leq \sin t \leq 1 \Leftrightarrow \underbrace{\sin^{-1} \frac{\sqrt{5}}{5}}_a \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\int_1^{\sqrt{5}} \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} dx = \sqrt{5} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \sqrt{5} \cos t dt$$

$$= 5 \int_a^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{|\cos t|}_{\substack{\text{cost car } t \in [0; \frac{\pi}{2}]} } \cos t dt$$

$$= \frac{5}{2} \int_a^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos t) dt$$

$$= \frac{5}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_a^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{5\pi}{4} + 0 - \frac{5}{2}a - \frac{5}{4} \sin(2a)$$

$$= \frac{5\pi}{4} + 0 - \frac{5}{2}a - \frac{5}{4} \cdot 2 \sin a \cos a$$

$$= \frac{5\pi}{4} - \frac{5}{2} \sin^{-1} \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{5\pi}{4} - \frac{5}{2} \sin^{-1} \frac{\sqrt{5}}{5} - 1$$

$$\text{Ainsi : Aire} = A_1 + A_2 = \frac{5\pi}{4} - \frac{5}{2} \sin^{-1} \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{4\sqrt{2}-7}{3} \approx 2,32 \text{ u.a.}$$