LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
MATHEMATIQUES II	CB	*Date de l'épreuve :*	*17/05/2022*
		Durée de l'épreuve :	*08:15 - 12:25*
		Numéro du candidat :	

Instructions

- L'élève répond à toutes les questions de la partie obligatoire.
- L'élève répond à exactement 1 question de la partie au choix. Il indique obligatoirement son choix en marquant d'une croix la case appropriée ci-dessous.

Seule la réponse correspondant à la question choisie par l'élève sera évaluée. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix renseigné sur la page de garde la partie au choix est cotée à 0 point.

Partie obligatoire (50 points)			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Obligatoire**
1	**14**	**Inéquation, équation et limite**	**X**
2	**16**	**Étude de fonction et calcul d'aire**	**X**
3	**6**	**Étude de fonction avec paramètre**	**X**
4	**6**	**Calcul d'aire**	**X**
5	**8**	**Calcul d'intégrales**	**X**
Partie au choix (10 points)			
Choisir 1 question parmi les 2 suivantes et indiquer le choix avec un X			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Choix du candidat**
6	**10**	**Continuité, dérivabilité et calcul d'aire**	
7	**10**	**Calcul d'aire**	

Question 1 (5+5+4 = 14 points)

a) Résoudre l'inéquation : $\log_2\left|1-2^x\right| \leq \log_2 12-|x|$.

b) Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{3}\ln x$, puis résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}}=\sqrt[3]{x}^{\ln x}$.
On n'a pas besoin d'indiquer les limites aux bornes de $\operatorname{Dom} f$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right)^{\sqrt{x}}$.

Question 2 (2+4+2+4+4 = 16 points)

Soit f la fonction définie par $f(x)=2\ln^2 x-5\ln x+2$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Déterminer $\operatorname{Dom} f$, calculer les limites de f aux bornes de $\operatorname{Dom} f$ et étudier l'existence de branches infinies de C_f.

b) Étudier les variations de f ainsi que la concavité de C_f. Montrer que C_f admet un seul point d'inflexion. Indiquer également les valeurs exactes des extrema éventuels ainsi que des coordonnées du point d'inflexion.

c) Représenter graphiquement f avec ses asymptotes éventuelles, ses extrema et son point d'inflexion.

d) Déterminer une équation cartésienne de la/des tangente(s) à C_f qui passe(nt) par l'origine du repère.

e) Calculer la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire de la partie finie du plan délimitée par C_f et l'axe des abscisses.

Question 3 (6 points)

Soit f_m la fonction définie par $f_m(x)=\ln\left|e^x-m\right|$ où $m\in\mathbb{R}^*$ et C_{f_m} sa représentation graphique.

Déterminer en fonction de m, $\operatorname{Dom} f_m$, les asymptotes éventuelles de C_{f_m} ainsi que les variations de f_m.

Question 4 (6 points)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{-x^2-3x+4}{x^2+9}$.

Calculer la valeur exacte et la valeur arrondie à 0,01 près de l'aire de la surface délimitée par C_f, (Ox) ainsi que les droites $d_1\equiv x=-3$ et $d_2\equiv x=3$.

Question 5 (4+4 = 8 points)

a) Déterminer l'intégrale indéfinie $\int(1+\cos x)^4(1-\cos x)^3\,dx$.

b) Calculer $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ (Indication : on peut poser par exemple $x=\sin t$).

Question 6 (2+3+5 = 10 points)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}(x^2-x)e^x & si \quad x\leq 0\\ x^2\ln(e^x-1) & si \quad x>0\end{cases}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Déterminer $\text{Dom} f$ et étudier la continuité de f en $x=0$.

b) Étudier la dérivabilité de f en $x=0$ et donner une interprétation graphique.

c) Soit g la fonction définie sur $]-\infty;0]$ par $g(x)=(2x^2+x)e^x$.

Calculer la valeur exacte de l'aire de la surface délimitée par C_f et C_g.

Question 7 (10 points)

On considère le cercle $C\equiv x^2+y^2=5$ et la parabole $P\equiv y=x^2+2x-1$.

Représenter graphiquement ces deux courbes et calculer l'aire de la surface du plan délimitée par les deux courbes et (Ox) et qui contient le point $P(1;1)$.

Formules trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \qquad \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \qquad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$$

$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$