LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022
CORRIGÉ – BARÈME

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 2	CC	*Date de l'épreuve :*	30.05.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 11:10

Question 1 *(6 points)*

Voir EM page 57

Question 2 *(6 + 5,5 + 1,5 + 3 = 16 points)*

1. $f(x)=1-x-\ln\dfrac{x-1}{x-2}$

C.E. : $(1)\, x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

$(2)\, \dfrac{x-1}{x-2}>0$

t.d.s. :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x-1}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$dom_f=]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-x-\ln\overbrace{\underbrace{\frac{x-1}{x-2}}_{1}}^{0}\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1-x-\ln\overbrace{\underbrace{\frac{x-1}{x-2}}_{1}}^{0}\right)=-\infty$$

C_f n'admet pas d'AH

$$\lim_{x\to1^-}\left(\underbrace{1-x}_{0}-\ln\overbrace{\underbrace{\frac{x-1}{x-2}}_{0^+}}^{-\infty}\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to2^+}\left(\underbrace{1-x}_{-1}-\ln\overbrace{\underbrace{\frac{x-1}{x-2}}_{+\infty}}^{+\infty}\right)=-\infty$$

C_f admet une AV d'équation $x=1$. C_f admet une AV d'équation $x=2$.

$f(x)=1-x-\underbrace{\ln\underbrace{\dfrac{x-1}{x-2}}_{1\text{ si }x\to\pm\infty}}_{0\text{ si }x\to\pm\infty}$ donc f est de la forme $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x)=0$

Ainsi C_f admet une AO d'équation $y=-x+1$.

2.

$$f'(x)=-1-\frac{\dfrac{1\cdot(x-2)-(x-1)\cdot1}{(x-2)^2}}{\dfrac{x-1}{x-2}}$$
$$=-1-\frac{-1}{(x-2)(x-1)}$$
$$=\frac{-(x-2)(x-1)+1}{(x-2)(x-1)}$$
$$=\frac{-x^2+3x-1}{(x-2)(x-1)}$$

Racines :

$f'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+3x-1=0$

$\Delta=3^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=5$

$x_1=\dfrac{-3+\sqrt5}{-2}=\dfrac{3-\sqrt5}{2}(\simeq0,38)$

$x_2=\dfrac{-3-\sqrt5}{-2}=\dfrac{3+\sqrt5}{2}(\simeq2,62)$

T.d.v.

x	$-\infty$		x_1		1		2		x_2		$+\infty$
$-x^2+3x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	//////////	$\Vert$	$+$	0	$-$	
C_f	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$		$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$

C_f admet un minimum en $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ avec $f(x_1)\approx 1{,}58$. Donc $m(0{,}38;1{,}58)$.

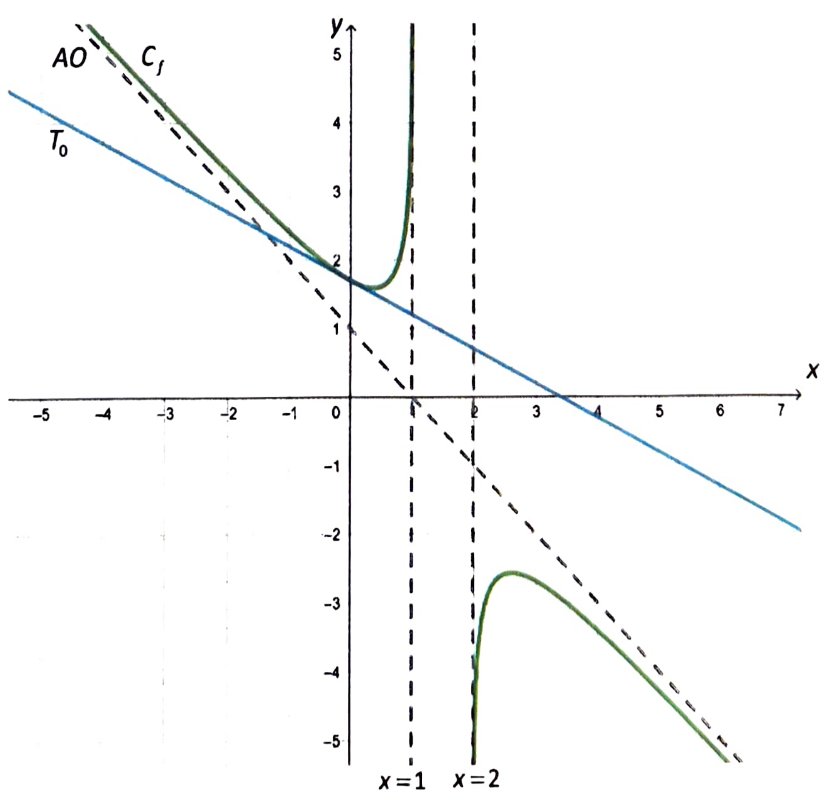
C_f admet un maximum en $x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ avec $f(x_2)\approx -2{,}58$. Donc $M(2{,}62;-2{,}58)$.

3. $f(0)=1-\ln\dfrac{1}{2}=1+\ln 2(\approx 1{,}69)$ $\qquad f'(0)=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

Donc $T_0\equiv y=-\dfrac{1}{2}(x-0)+1+\ln 2 \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+1+\ln 2$

4. Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4.22	3.29	2.41	1.69	/	/	-2.69	-3.41	-4.29



Question 3 *(4,5 + 3,5 = 8 points)*

1. $f(x)=(3-x^2)xe^x$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(3-x^2)xe^x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-x^3}{e^{-x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad \text{bon pour Hospital}$$

$$\overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{3-3x^2}{-e^{-x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad \text{bon pour Hospital}$$

$$\overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-6x}{e^{-x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad \text{bon pour Hospital}$$

$$\overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-6}{-e^{-x}}=0$$

C_f admet une AH (à gauche) : $y=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{(3-x^2)}_{-\infty}\underbrace{x}_{+\infty}\,\underbrace{e^x}_{+\infty}\right]=-\infty$$

C_f n'admet pas de AH (à droite).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-x^2)xe^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{(3-x^2)}_{-\infty}\underbrace{e^x}_{+\infty}\right]=-\infty$$

C_f n'admet pas de AO (à droite).

2. $y_{C_f}-y_{AH}=(3-x^2)xe^x-0=(3-x^2)xe^x$

Etudions le signe de $(3-x^2)xe^x$.

Racines :

$3-x^2=0$ ou $x=0$ ou $e^x=0$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$ imp.

Position relative à l'AH :

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$3-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
e^x	$+$		$+$		$+$		$+$
$y_{C_f}-y_{AH}$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
Position relative	C_f/AH	C_f coupe AH	AH/C_f	C_f coupe AH	C_f/AH	C_f coupe AH	AH/C_f

Question 4

(3 + 4 + 3 = 10 points)

1. $\log_3\left(3^x+1\right)-x=\log_{\sqrt{3}}2\ (*)$

C.E. : $3^x+1>0$ tjs. vrai donc $dom_E=\mathbb{R}$

$(*)\Leftrightarrow \log_3\left(3^x+1\right)-\log_3 3^x=\dfrac{\log_3 2}{\log_3\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \log_3\left(3^x+1\right)=2\log_3 2+\log_3 3^x$

$\Leftrightarrow \log_3\left(3^x+1\right)=\log_3\left(2^2\cdot 3^x\right)$ $\quad\left|\begin{array}{l}3^{(\dots)}\\ \text{bij. str.}\nearrow\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 3^x+1=4\cdot 3^x$

$\Leftrightarrow -3\cdot 3^x=-1$

$\Leftrightarrow 3^x=\dfrac{1}{3}$ $\quad\left|\begin{array}{l}\log_3(\dots)\\ \text{bij. str.}\nearrow\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=-1 \qquad S=\{-1\}$

2. $3\left(2-e^x\right)<2e^x+e^{-x} \quad (*) \quad dom_I=\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 6-3e^x<2e^x+e^{-x}$ $\quad\left|\cdot e^x>0\right.$

$\Leftrightarrow 6e^x-3e^{2x}<2e^{2x}+1$

$\Leftrightarrow -5e^{2x}+6e^x-1<0$

Posons $y=e^x$ avec $y>0$:

$-5y^2+6y-1<0$

Racines : $\Delta=6^2-4\cdot(-5)\cdot(-1)=16$

$y=\dfrac{-6-\sqrt{16}}{-10}=1$ ou $y=\dfrac{-6+\sqrt{16}}{-10}=\dfrac{1}{5}$

y		$\frac{1}{5}$		1	
$-5y^2+6y-1$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $(*)\Leftrightarrow 0<e^x<\dfrac{1}{5}$ ou $e^x>1$

$\Leftrightarrow x<\ln\dfrac{1}{5}$ *ou* $x>\ln 1$

$\Leftrightarrow x<-\ln 5$ *ou* $x>0$

$S=\left]-\infty;-\ln 5\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

3. $f(x)=\dfrac{-3}{2x\cdot\ln x}=\dfrac{-3}{2}\cdot\underbrace{\dfrac{1}{\ln x}}_{\frac{1}{u}}\cdot\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{u'}$

$F(x)=\dfrac{-3}{2}\ln\left|\ln x\right|+k \qquad ,k\in\mathbb{R}$

$F\left(e^2\right)=0\Leftrightarrow \dfrac{-3}{2}\ln 2+k=0$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{3}{2}\ln 2$

Donc $F(x)=\dfrac{-3}{2}\ln\left|\ln x\right|+\dfrac{3}{2}\ln 2$

Question 5 *(3 + 3 = 6 points)*

1.

posons : $y = -3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}y$

si $x \to 0$ alors $y \to 0$

$$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}-3} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{-6}{y}-3}$$

$$= \underbrace{\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-6}}_{\to e} \cdot \underbrace{\lim_{y\to 0}(1+y)^{-3}}_{\to 1}$$

$$= e^{-6}$$

2.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_{\frac{1}{2}}\left(e^{3x}-1\right)}{2x-1} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ bon pour Hospital}$$

$$\overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{3e^{3x}}{e^{3x}-1}}{2}$$

$$= \frac{3}{-2\ln 2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{e^{3x}-1} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ bon pour Hospital}$$

$$\overset{\boxed{H}}{=} \frac{3}{-2\ln 2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{3e^{3x}}}{\cancel{3e^{3x}}}}_{1}$$

$$= \frac{3}{-2\ln 2}$$

Question 6 *(1 + 4 = 5 points)*

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1-e^x\right)\left(e-e^x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 1-e^x = 0$ ou $e-e^x = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 1$ ou $e^x = e$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

Donc $A(0;0)$ et $B(1;0)$

2. f **est négative sur** $[x_A; x_B]$ donc :

$$A = -\int_0^1 f(x)dx$$

$$= -\int_0^1\left(e-e^x-ee^x+e^{2x}\right)dx$$

$$= -\int_0^1\left(e^{2x}-(1+e)e^x+e\right)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{2}e^{2x}-(1+e)e^x+ex\right]_0^1$$

$$= -\left(\frac{1}{2}e^2-(1+e)e+e\right)+\left(\frac{1}{2}-(1+e)+0\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^2+e+e^2-e+\frac{1}{2}-1-e$$

$$= \frac{1}{2}e^2-e-\frac{1}{2} \text{ u.a.} \qquad (\approx 0{,}48 \text{ u.a.})$$

Question 7

(4,5 + 4,5 = 9 points)

1. $f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+5}{x^2+3}$

Division polynomiale

$$\begin{array}{llll} 2x^3 & -3x^2 & & +5 \\ \underline{2x^3} & & \underline{+6x} & \\ & -3x^2 & -6x & +5 \\ & \underline{-3x^2} & & \underline{-9} \\ & & -6x & +14 \end{array} \quad =(x^2+3)\cdot(2x-3)$$

autre méthode :

$$ax+b+\frac{cx+d}{x^2+3}$$
$$=\frac{ax^3+bx^2+(3a+c)x+(3b+d)}{x^2+3}$$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ 3a+c=0 \\ 3b+d=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=-6 \\ d=14 \end{cases}$$

Donc :

$$f(x)=2x-3+\frac{-6x}{x^2+3}+\frac{14}{x^2+3}$$

Alors :

$$\int f(x)dx$$

$$=\int(2x-3)dx-\int\frac{3\cdot 2x}{x^2+3}dx+\int\frac{14\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{3\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}dx$$

$$=x^2-3x-3\ln\left|x^2+3\right|+\frac{14\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)+k$$

$$,k\in\mathbb{R}$$

2.

$$A=\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\cos(2x)\cdot e^{-x}dx$$

$$\begin{bmatrix} u=\cos(2x) & v'=e^{-x} \\ u'=-2\sin(2x) & v=-e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$A=\left[-\cos(2x)\cdot e^{-x}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}}-\underbrace{\int_0^{-\frac{\pi}{2}}2\sin(2x)\cdot e^{-x}dx}_{B}$$

$$B=2\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\cdot e^{-x}dx$$

$$\begin{bmatrix} u=\sin(2x) & v'=e^{-x} \\ u'=2\cos(2x) & v=-e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$B=2\left\{\left[-\sin(2x)\cdot e^{-x}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}}-\int_0^{-\frac{\pi}{2}}-2\cos(2x)\cdot e^{-x}dx\right\}$$

$$=-2\left[\sin(2x)\cdot e^{-x}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}}+4\underbrace{\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\cos(2x)\cdot e^{-x}dx}_{=A}$$

Donc :

$$A=-\left[\cos(2x)\cdot e^{-x}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}}+2\left[\sin(2x)\cdot e^{-x}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}}-4A$$

$$\Leftrightarrow 5A=-\left[\cos(2x)\cdot e^{-x}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}}+2\left[\sin(2x)\cdot e^{-x}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow A=-\frac{1}{5}\left[\cos(2x)\cdot e^{-x}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{5}\left[\sin(2x)\cdot e^{-x}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow A=-\frac{1}{5}\left(-e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)+\frac{2}{5}(0-0)$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{1}{5}e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{5}$$

Question 8

(4,5 + 4,5 = 9 points)

1. $f(x)=\dfrac{4x^3-12x^2+5x-10}{4x^2+3}$

Division polynomiale

$$\begin{array}{llll} 4x^3 & -12x^2 & +5x & -10=\left(4x^2+3\right)\cdot(x-3) \\ \underline{4x^3} & & \underline{+3x} & \\ & -12x^2 & +2x & -10 \\ & \underline{-12x^2} & & \underline{-9} \\ & & 2x & -1 \end{array}$$

autre méthode :

$$ax+b+\frac{cx+d}{4x^2+3}$$
$$=\frac{4ax^3+4bx^2+(3a+c)x+(3b+d)}{4x^2+3}$$

$$\begin{cases} 4a=4 \\ 4b=-12 \\ 3a+c=5 \\ 3b+d=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=2 \\ d=-1 \end{cases}$$

Donc :

$$f(x)=x-3+\frac{2x}{4x^2+3}-\frac{1}{4x^2+3}$$

Alors :

$$\int f(x)dx$$

$$=\int(x-3)dx+\int\frac{\frac{1}{4}\cdot 4\cdot 2x}{4x^2+3}dx-\int\frac{\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}{3\left[\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{1}{4}\ln\left|4x^2+3\right|-\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}x}{3}\right)+k$$

$,k\in\mathbb{R}$

2. $A=\int_0^{-\pi}\sin(3x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}dx$

$$\left[\begin{array}{ll} u=\sin(3x) & v'=e^{-\frac{1}{2}x} \\ u'=3\cos(3x) & v=-2e^{-\frac{1}{2}x} \end{array}\right]$$

$$A=\left[-2\sin(3x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{-\pi}-\int_0^{-\pi}3\cos(3x)\cdot\left(-2e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$$

$$=\left[-2\sin(3x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{-\pi}+6\underbrace{\int_0^{-\pi}\cos(3x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}dx}_{B}$$

$$B=\int_0^{-\pi}\cos(3x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}dx$$

$$\left[\begin{array}{ll} u=\cos(3x) & v'=e^{-\frac{1}{2}x} \\ u'=-3\sin(3x) & v=-2e^{-\frac{1}{2}x} \end{array}\right]$$

$$B=\left[-2\cos(3x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{-\pi}-\int_0^{-\pi}6\sin(3x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}dx$$

$$=\left[-2\cos(3x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{-\pi}-6\underbrace{\int_0^{-\pi}\sin(3x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}dx}_{A}$$

Donc :

$$A=\left[-2\sin(3x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{-\pi}$$
$$+6\left[-2\cos(3x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{-\pi}-36A$$

$$\Leftrightarrow 37A=\left[-2\sin(3x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{-\pi}$$
$$+6\left[-2\cos(3x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{-\pi}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{1}{37}(0-0)+\frac{6}{37}\left(2e^{\frac{\pi}{2}}-(-2)\right)$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{12}{37}e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{12}{37}$$