LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES **Sessions 2022** **CORRIGÉ – BARÈME**

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	**CD**	*Date de l'épreuve :*	**02.06.22**
		Durée de l'épreuve :	**08:15 - 10:10**

Question 1 (9+4=13 points) **Question obligatoire**

a) $z = \dfrac{(2-2i)^7}{(4+4\sqrt{3}i)^3}$

Posons $z' = 2 - 2i$

Module $|z'| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos\varphi' = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\varphi' = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\varphi' = -\frac{\pi}{4}\,(mod\ 2\pi)$

Donc $z' = 2\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **(2pts)**

Posons $z'' = 4 + 4\sqrt{3}i$

Module $|z''| = 8$

$\cos\varphi'' = \frac{1}{2} \qquad \sin\varphi'' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\varphi'' = \frac{\pi}{3}\,(mod\ 2\pi)$

Donc $z'' = 8cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **(2pts)**

$$z = \frac{\left(2\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^7}{\left(8cis\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^3} = \frac{2^7\sqrt{2}^6\sqrt{2}cis\left(-\frac{7\pi}{4}\right)}{2^9 cis\left(\frac{3\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}cis\left(-\frac{7\pi}{4}-\pi\right) = 2\sqrt{2}cis\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}cis\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2-2i$$ **(5pts)**

b) $z = -81cis\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 81\ cis\ (\pi)\cdot cis\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 81cis\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 81cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Les racines quatrièmes sont données par $z_k = \sqrt[4]{81}cis\left(\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$, $k \in \{0\,;1\,;2;3\}$

$$z_0 = 3cis\left(-\frac{\pi}{16}\right) \quad z_1 = 3cis\left(\frac{7\pi}{16}\right) \quad z_2 = 3cis\left(\frac{15\pi}{16}\right) \quad z_3 = 3cis\left(\frac{23\pi}{16}\right)$$

Question 2 (4+4+6+3=17 points) **Question obligatoire**

a) $A(-3;2;4)$, $B(0;-2;7)$ et $C(-4;3;-5)$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-9\end{pmatrix}$$

$\nexists k \in \mathbb{R}\ tel\ que\ \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$$M(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}\ sont\ coplanaires$$

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 3 & -1 \\ y-2 & -4 & 1 \\ z-4 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 33x + 24y - z + 55 = 0$$

Donc $\pi \equiv 33x + 24y - z + 55 = 0$.

b) Comme $d \perp \pi$, un vecteur directeur de d est un vecteur normal à π : $\vec{n}\begin{pmatrix} 33 \\ 24 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{EM}\ et\ \vec{n}\ sont\ colinéaires$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}\ tel\ que\ \overrightarrow{EM} = k\vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 33k - 1 & (1) \\ y = 24k + 6 & (2) \\ z = -k + 1 & (3) \end{cases}$$ équations paramétriques de d

$(3) \Leftrightarrow k = -z + 1$

dans (1): $x = -33z + 33 - 1$ dans (2): $y = -24z + 24 + 6$

Donc on trouve $\begin{cases} x + 33z - 32 = 0 \\ y + 24z - 30 = 0 \end{cases}$ équations cartésiennes de d

c) $d' \equiv \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$

Posons $y = k$, $k \in \mathbb{R}$

On obtient $\begin{cases} x = \frac{1}{2}k + 2 \\ y = k \\ z = \frac{1}{3}k + \frac{2}{3} \end{cases}$

D'où $F\left(2;0;\frac{2}{3}\right)$ est un point et $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d'.

Comme d' est contenue dans π', $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de π'.

$$M(x;y;z) \in \pi' \Leftrightarrow \overrightarrow{GM};\ \overrightarrow{GF}\ et\ \vec{u}\ sont\ coplanaires$$

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{GM}; \overrightarrow{GF}; \vec{u}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & \frac{1}{2} \\ y+2 & 2 & 1 \\ z-3 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{3}{2}y - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$$

Donc $\pi' \equiv 2x - y - 4 = 0$.

d) Pour trouver les coordonnées du point I, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} x = 33k - 1 \ (1) \\ y = 24k + 6 \ (2) \\ z = -k + 1 \ (3) \\ 2x - y - 4 = 0 \ (4) \end{cases}$$

$(1), (2)$ *et* (3) dans (4):$42k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{7}$

Donc $\begin{cases} x = \frac{59}{7} \\ y = \frac{90}{7} \\ z = \frac{5}{7} \end{cases}$ $\qquad I\left(\frac{59}{7}; \frac{90}{7}; \frac{5}{7}\right)$

<u>Question 3</u> (4+11=15 points) Question obligatoire

a)

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + my - z = -1 \\ (m+1)x + (m+1)y + (m-1)z = 0 \end{cases}$$

Soit $A\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & m & -1 \\ m+1 & m+1 & m-1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & m & -1 \\ m+1 & m+1 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-1) + m + 1 + 2(m+1)$$
$$-\left(2m(m+1) - (m+1) - (m-1)\right) = -m^2 + 2m + 3 = -(m+1)(m-3)$$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow -(m+1)(m-3) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ et $m \neq 3$

Le système admet donc une solution unique si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

b)

***si $m = -2$** **(4pts)**

Le système s'écrit $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x - 2y - z = -1 \\ -x - y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 & (1) \\ x - 2y - z = -1 & (2) \\ x + y + 3z = 0 & (3) \end{cases}$

$$(1){:}x = y - 2z + 1 \ \ (1)'$$

Dans $(2){:} -y - 3z = -2 \Leftrightarrow y = 2 - 3z \ (2)'$

Dans $(3){:}2y + z = -1 \ \ (3)'$

$(2)'$ dans $(3)'{:}4 - 5z = -1 \Leftrightarrow z = 1$

Dans $(2)'{:}y = -1$

Dans $(1)'{:} x = -2$

$$S = \{(-2; -1; 1)\}$$

Si $m = -2$, les trois plans se coupent en un point de coordonnées $(-2;-1;1)$.

***si $m = -1$** **(2pts)**

Le système s’écrit $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ x-y-z=-1 \\ -2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=1 & (1) \\ x-y-z=-1 & (2) \\ z=0 & (3) \end{cases}$

$$(1): x = y - 2z + 1 \ (1)'$$

(3) et $(1)'$ dans (2): $1 = -1$ impossible

$S = \emptyset$

Si $m = -1$, les trois équations du système sont celles de trois plans qui n’ont pas de point en commun.

***si $m = 3$** **(5pts)**

Le système s’écrit $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+3y-z=-1 \\ 4x+4y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=1 & (1) \\ x+3y-z=-1 & (2) \\ 2x+2y+z=0 & (3) \end{cases}$

$$(1): x = y - 2z + 1 \ (1)'$$

Dans (2) : $4y - 3z = -2$

Dans (3): $4y - 3z = -2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}z - \frac{1}{2} \ (3)'$

Système indéterminé : posons $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans $(3)'$: $y = \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{2}$

Dans $(1)'$: $x = -\frac{5}{4}\alpha + \frac{1}{2}$

$$S = \left\{ \left(-\frac{5}{4}\alpha + \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{2}; \alpha \right) | \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $m = 3$, les trois équations du système sont celles de trois plans qui se coupent en une droite de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ et passant par le point $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$.

Alternatives $S = \left\{ \left(-\frac{5}{3}\beta - \frac{1}{3}; \beta; \frac{4}{3}\beta + \frac{2}{3} \right) | \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\gamma; -\frac{3}{5}\gamma - \frac{1}{5}; -\frac{4}{5}\gamma + \frac{2}{5} \right) | \gamma \in \mathbb{R} \right\}$

<u>Question 4</u> (11+4=15 points) Question au choix

a) $P(z) = z^3 - (9-6i)z^2 + (43-54i)z + 5 + 168i.$

Schéma de Horner

	1	$-9+6i$	$43-54i$	$5+168i$
$2-7i$		$2-7i$	$-21+47i$	$-5-168i$
	1	$-7-i$	$22-7i$	0

Donc $2 - 7i$ est une racine de P.

D'où $P(z) = (z-2+7i)\left(z^2-(7+i)z+22-7i\right)$ **(3pts)**

Reste à résoudre $z^2-(7+i)z+22-7i=0$

$\Delta = (7+i)^2 - 4(22-7i) = -40+42i$ **(1pt)**

Soit $\delta = x+yi$ $(x,y \in \mathbb{R})$ une racine carrée complexe de Δ.

Ainsi on obtient : $\begin{cases} x^2-y^2=-40 & (1) \\ 2xy = 42 & (2) \\ x^2+y^2=58 & (3) \end{cases}$

$$(1)+(3):\ \ 2x^2=18 \Leftrightarrow x=3 \ ou\ x=-3$$

$$(1)-(3):\ -2y^2=-98 \Leftrightarrow y=7\ ou\ y=-7$$

(2) implique que $x\ et\ y$ sont de même signe.

Donc $\delta_1 = 3+7i\ \ et\ \delta_2=-3-7i$. **(4pts)**

D'où $z_1 = \frac{7+i+3+7i}{2} = 5+4i \quad et \quad z_2 = \frac{7+i-3-7i}{2} = 2-3i$ **(2pts)**

Finalement $S = \{2-7i; 5+4i; 2-3i\}$

Et $P(z) = (z-2+7i)(z-5-4i)(z-2+3i)$ **(1pt)**

b) $(-3+2i)z-(2+i)\bar{z}=4$

Posons $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. On obtient

$$(-3+2i)(x+yi)-(2+i)(x-yi)=4$$

$$\Leftrightarrow -3x-3yi+2xi-2y-2x+2yi-xi-y=4$$

$$\Leftrightarrow -5x-3y+xi-yi=4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x-3y=4 & (1) \\ x-y=0 & (2) \end{cases}$$

De (2):$x=y$

Dans (1): $-5y-3y=4 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$

Dans (2):$x=-\frac{1}{2}$ $S=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$

<u>Question 5</u> (9+2+4=16 points) Question au choix

a) $Z = \frac{{z_1}^2}{z_2} = \frac{(-3+\sqrt{3}i)^2}{3icis\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{9-6\sqrt{3}i-3}{3i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} = \frac{6(1-\sqrt{3}i)}{3\frac{\sqrt{2}}{2}i(1+i)} = \frac{2\sqrt{2}(1-\sqrt{3}i)}{-1+i} = \frac{2\sqrt{2}(1-\sqrt{3}i)}{-1+i}\cdot\frac{1+i}{1+i}$

$= \frac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3}+i-\sqrt{3}i)}{-2} = -\sqrt{2}-\sqrt{6}+(-\sqrt{2}+\sqrt{6})i$

(5pts)

$Z = \frac{{z_1}^2}{z_2} = \frac{6(1-\sqrt{3}i)}{3icis\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2\cdot 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{cis\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot cis\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4cis\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 4cis\left(-\frac{13\pi}{12}\right) = 4cis\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ **(4pts)**

b) On en déduit que

$$4cis\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\sqrt{2}-\sqrt{6}+(-\sqrt{2}+\sqrt{6})i$$

Donc $\begin{cases} 4\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\sqrt{2}-\sqrt{6} \\ 4\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\sqrt{2}+\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

Ainsi $\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}-\sqrt{6}} \cdot \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{2-4\sqrt{3}+6}{2-6} = -2+\sqrt{3}$

c) $z_2 = 3icis\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Les racines quatrièmes sont données par $u_k = \sqrt[4]{3}cis\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$, $k \in \{0\,;1\,;2;3\}$

$$u_0 = \sqrt[4]{3}cis\left(\frac{3\pi}{16}\right) \quad u_1 = \sqrt[4]{3}cis\left(\frac{11\pi}{16}\right) \quad u_2 = \sqrt[4]{3}cis\left(\frac{19\pi}{16}\right) \quad u_3 = \sqrt[4]{3}cis\left(\frac{27\pi}{16}\right)$$