LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES

Sessions 2022

CORRIGÉ – BARÈME

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques	CE;CF;CG	*Date de l'épreuve :*	02.06.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 10:25

PARTIE OBLIGATOIRE (48 points)

Question 1 **(12 points)**

Déterminons le prix d'une boîte de chaque sorte de masques :

- Choix des inconnues :

Soit x le prix d'une boîte de masques chirurgicaux standards : $x \in \mathbb{D}^+$

Soit y le prix d'une boîte de masques chirurgicaux avec virucide : $y \in \mathbb{D}^+$

Soit z le prix d'une boîte de masques FFP2 : $z \in \mathbb{D}^+$

- Mise en équation et résolution du système :

$$(S)\begin{cases} 36x + 27y + 54z = 1368 \\ 40x + 48y + 56z = 1752 \\ 28y + 42x + 56z = 1477 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36x + 27y + 54z = 1368 & L_1 \leftarrow L_1 : 9 \\ 40x + 48y + 56z = 1752 & L_2 \leftarrow L_2 : 8 \\ 42x + 28y + 56z = 1477 & L_3 \leftarrow L_3 : 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 6z = 152 & L_1 \\ 5x + 6y + 7z = 219 & L_2 \leftarrow 4L_2 - 5L_1 \\ 6x + 4y + 8z = 211 & L_3 \leftarrow 3L_1 - 2L_3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 4L_2 : & 20x + 24y + 28z = 876 \\ -5L_1 : & -20x - 15y - 30z = -760 \\ \hline 4L_2 - 5L_1 : & 9y - 2z = 116 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 3L_1 : & 12x + 9y + 18z = 456 \\ -2L_3 : & -12x - 8y - 16z = -422 \\ \hline 3L_1 - 2L_3 : & y + 2z = 34 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 6z = 152 & L_1 \\ 9y - 2z = 116 & L_2 \\ y + 2z = 34 & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 6z = 152 & L_1 \\ 9y - 2z = 116 & L_2 \\ 10y = 150 & L_3 \end{cases}$$

$L_3 : 10y = 150 \Leftrightarrow y = 15$

Dans $L_2 : 9 \cdot 15 - 2z = 116 \Leftrightarrow -2z = -19 \Leftrightarrow z = 9{,}5$

Dans $L_1 : 4x + 3 \cdot 15 + 6 \cdot 9{,}5 = 152 \Leftrightarrow 4x = 50 \Leftrightarrow x = 12{,}5$

$S = \{(12{,}5\,;15\,;9{,}5)\}$

- Interprétation du résultat :

$12{,}5 \in \mathbb{D}^+$; $15 \in \mathbb{D}^+$ et $9{,}5 \in \mathbb{D}^+$

donc une boîte de masques chirurgicaux standards coûte 12,50 €, une boîte de masques chirurgicaux avec virucide coûte 15 € et une boîte de masques FFP2 coûte 9,50 €.

Déterminons le prix de vente unitaire de chaque sorte de masques de protection « Made in Luxembourg » :

$12{,}5 : 50 = 0{,}25$ $\quad\quad$ $15 : 50 = 0{,}30$ $\quad\quad$ $9{,}5 : 10 = 0{,}95$

Un masque chirurgical standard coûte 0,25 €, un masque chirurgical avec virucide coûte 0,30 € et un masque FFP2 coûte 0,95 €.

Question 2 **(9 points)**

Résolution du système $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \\ x + 2y \geq 8 \\ 3x + 2y \geq 16 \\ x + y \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 & (1) \\ y \geq 1 & (2) \\ x + 2y - 8 \geq 0 & (3) \\ 3x + 2y - 16 \geq 0 & (4) \\ x + y - 12 \leq 0 & (5) \end{cases}$

Résolution de (1) : Droite associée : $d_1 \equiv x = 2$

Point-test : $O(0; 0)$ $\quad$ $0 < 2$ $\quad$ donc le point O n'appartient pas au demi-plan solution de (1).

Résolution de (2) : Droite associée : $d_2 \equiv y = 1$

Point-test : $O(0; 0)$ $\quad$ $0 < 1$ $\quad$ donc le point O n'appartient pas au demi-plan solution de (2).

Résolution de (3) :

Droite associée : $d_3 \equiv x + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow d_3 \equiv y = -\frac{1}{2}x + 4$

x	0	8
y	4	0

Point-test : $O(0; 0)$ $\quad$ $0 + 2 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$

donc le point O n'appartient pas au demi-plan solution de (3).

Résolution de (4) :

Droite associée : $d_4 \equiv 3x + 2y - 16 = 0 \iff d_4 \equiv y = -\frac{3}{2}x + 8$

x	0	6
y	8	-1

Point-test : $O(0;0)$ $\quad 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 16 = -16 < 0$

donc le point O n'appartient pas au demi-plan solution de (4).

Résolution de (5) :

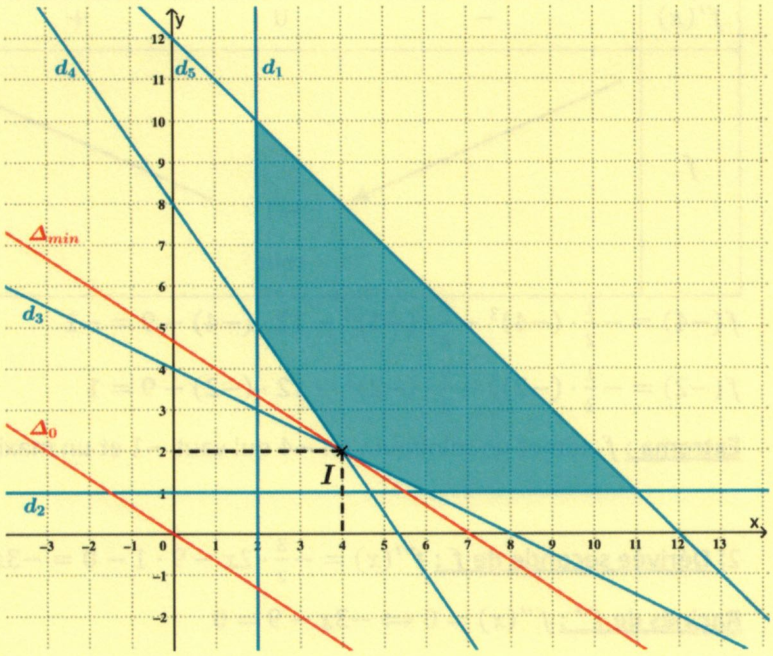
Droite associée : $d_5 \equiv x + y - 12 = 0 \iff d_5 \equiv y = -x + 12$

x	0	12
y	12	0

Point-test : $O(0;0)$ $\quad 0 + 0 - 12 = -12 \leq 0$

donc le point O appartient au demi-plan solution de (5).

Polygone des contraintes :



Détermination du minimum de la fonction $f(x;y) = 2x + 3y$ sous les contraintes données.

Posons $\Delta_0 \equiv 2x + 3y = 0 \iff \Delta_0 \equiv y = -\frac{2}{3}x$.

x	-3	3
y	2	-2

La droite Δ_{min} parallèle à la droite Δ_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est la plus proche de l'origine passe par le sommet I, point d'intersection des droites d_3 et d_4. Par lecture graphique, on trouve $I(4;2)$.

$f(4\,;2) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$ donc le minimum de la fonction f sous les contraintes données est 14.

Question 3 **(5 + 4 + 2 = 11 points)**

1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x - 9$

Dérivée de f : $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 3x^2 - \frac{9}{2} \cdot 2x - 12 \cdot 1 - 0 = -\frac{3}{2}x^2 - 9x - 12$

Racines de f' : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2 - 9x - 12 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-12) = 81 - 72 = 9$

$\Delta > 0$ donc f' admet deux racines :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9)-\sqrt{9}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{9-3}{-3} = -2$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9)+\sqrt{9}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{9+3}{-3} = -4$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	-1 min	$\nearrow$	1 Max	$\searrow$	

$f(-4) = -\frac{1}{2} \cdot (-4)^3 - \frac{9}{2} \cdot (-4)^2 - 12 \cdot (-4) - 9 = -1$

$f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^3 - \frac{9}{2} \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) - 9 = 1$

Extrema : f admet un minimum en -4 qui vaut -1 et un maximum en -2 qui vaut 1.

2) **Dérivée seconde de f :** $f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x - 9 \cdot 1 - 0 = -3x - 9$

Racines de f'' : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x - 9 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$

Tableau de concavité :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{C}_f$		$\cup$	PI	$\cap$	

$f(-3) = -\frac{1}{2} \cdot (-3)^3 - \frac{9}{2} \cdot (-3)^2 - 12 \cdot (-3) - 9 = 0$

Point d'inflexion : La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion I de coordonnées $(-3; 0)$.

3) Alternative 1 :

$f(-3) = 0$ $\qquad$ $f'(-3) = -\frac{3}{2} \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 12 = \frac{3}{2}$

$t_{-3} \equiv mx + p$ avec $m = f'(-3) = \frac{3}{2}$ donc $t_{-3} \equiv \frac{3}{2}x + p$

$$A(-3; 0) \in t_{-3} \iff 0 = \frac{3}{2} \cdot (-3) + p$$
$$\iff p = \frac{9}{2}$$

Donc $t_{-3} \equiv y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$

Alternative 2 :

L'équation réduite de la tangente t_{-3} à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -3 est donnée par :

$t_{-3} \equiv y = f'(-3)(x - (-3)) + f(-3)$ $\qquad$ $f(-3) = 0$

$\iff t_{-3} \equiv y = \frac{3}{2}(x + 3) + 0$ $\qquad$ $f'(-3) = -\frac{3}{2} \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 12 = \frac{3}{2}$

$\iff t_{-3} \equiv y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$

Question 4 **(2 + (3+3) + 6 = 14 points)**

1) $\log\sqrt{\frac{b^5}{a}} = \frac{1}{2}\log\frac{b^5}{a} = \frac{1}{2}(\log b^5 - \log a) = \frac{1}{2}(5\log b - \log a) = \frac{1}{2}(5 \cdot 5 - (-4)) = \frac{29}{2}$

2) a) $\forall x \in]-\infty; 2[$:

$4 - 2\log_4(4 - 2x) = 0$

$\iff -2\log_4(4 - 2x) = -4 \qquad |:(-2)$

$\iff \log_4(4 - 2x) = 2$

$\iff \log_4(4 - 2x) = \log_4 4^2$

$\iff 4 - 2x = 16$

$\iff -2x = 12$

$\iff x = -6$

$-6 \in]-\infty; 2[\qquad S = \{-6\}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$:

Alternative 1 :

$$6-3\cdot 4^{4-2x}=2-4^{4-2x} \quad |+4^{4-2x}-6$$
$$\Leftrightarrow\ -2\cdot 4^{4-2x}=-4 \quad |:(-2)$$
$$\Leftrightarrow\ 4^{4-2x}=2$$
$$\Leftrightarrow\ 4^{4-2x}=4^{\log_4 2}$$
$$\Leftrightarrow\ 4-2x=\log_4 2$$
$$\Leftrightarrow\ 4-2x=\log_4\sqrt{4}$$
$$\Leftrightarrow\ 4-2x=\frac{1}{2}\log_4 4$$
$$\Leftrightarrow\ 4-2x=\frac{1}{2} \quad |-4$$
$$\Leftrightarrow\ -2x=-\frac{7}{2} \quad |:(-2)$$
$$\Leftrightarrow\ x=\frac{7}{4}$$
$$S=\left\{\frac{7}{4}\right\}$$

Alternative 2 :

$$6-3\cdot 4^{4-2x}=2-4^{4-2x} \quad |+4^{4-2x}-6$$
$$\Leftrightarrow\ -2\cdot 4^{4-2x}=-4 \quad |:(-2)$$
$$\Leftrightarrow\ 4^{4-2x}=2 \quad |\log(\cdot)$$
$$\Leftrightarrow\ \log\left(4^{4-2x}\right)=\log 2$$
$$\Leftrightarrow\ (4-2x)\log 4=\log 2 \quad |:\log 4$$
$$\Leftrightarrow\ 4-2x=\frac{\log 2}{\log 4}$$
$$\Leftrightarrow\ 4-2x=\frac{\log 2}{\log 2^2}$$
$$\Leftrightarrow\ 4-2x=\frac{\log 2}{2\log 2}$$
$$\Leftrightarrow\ 4-2x=\frac{1}{2} \quad |-4$$
$$\Leftrightarrow\ -2x=-\frac{7}{2} \quad |:(-2)$$
$$\Leftrightarrow\ x=\frac{7}{4}$$
$$S=\left\{\frac{7}{4}\right\}$$

Question 5 **(2 + 2 + 2 + 2 = 8 points)**

	Section E	Section F	Section G	Totaux
Admis	111	26	324	461
Non admis	15	3	73	91
Totaux	126	29	397	552

1) $p(E)=p(section\ E)=\frac{126}{552}=\frac{21}{92}\approx 0{,}23.$

2) $p(G\ et\ A)=p(section\ G\ et\ admis)=\frac{324}{552}=\frac{27}{46}\approx 0{,}59.$

3) $p(\bar{F}$ si $\bar{A})=p(pas\ en\ section\ F\ si\ pas\ admis)=\frac{15+73}{91}=\frac{88}{91}\approx 0{,}97.$

4) $p(\bar{A}\ si\ E)=p(non\ admis\ si\ section\ E)=\frac{15}{126}=\frac{5}{42}\approx 0{,}12.$

PARTIE AU CHOIX (12 points)

Question 6 a **(6 points)**

Tableau de variation de f à l'aide du signe de f' d'après $C_{f'}$:

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	min	↗	Max	↘	

D'après les variations de f, $C_f = C_6$.

Tableau de signe de f'' à l'aide des variations de f' d'après $C_{f'}$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'		↗	Max	↘	

D'après le signe de f'', $C_{f''} = C_1$ ou $C_{f''} = C_5$.

Comme $C_{f'}$ est une parabole, alors f' est une fonction polynôme de degré 2 donc f'' est une fonction affine.

La courbe C_1 est à écarter et on en déduit donc que $C_{f''} = C_5$.

Question 6 b **(6 points)**

C_f et C_h admettent des asymptotes horizontales : ce sont donc des représentations graphiques de fonctions exponentielles de base a.

Comme $f(1) = \frac{1}{5} = a^1$, alors $a = \frac{1}{5}$ et l'expression analytique de la fonction f est $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Comme $h(1) = 5 = a^1$, alors $a = 5$ et l'expression analytique de la fonction h est $h(x) = 5^x$.

C_g admet une asymptote verticale : il s'agit donc de la représentation graphique d'une fonction logarithme de base a.

Comme $g\left(\frac{1}{5}\right) = 1 = \log_a a$, alors $a = \frac{1}{5}$ et l'expression analytique de la fonction g est $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Question 7 a **(2 + 2 + 2 = 6 points)**

Modélisons la situation à l'aide d'un tableau :

Nombre de cas possibles : 36

Soit S la somme des deux résultats obtenus.

2ème jet \ 1er jet	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1) $P(S\ est\ un\ nombre\ premier) = P(S = 2\ ou\ S = 3\ ou\ S = 5\ ou\ S = 7\ ou\ S = 11)$

$$= \frac{1+2+4+6+2}{36}$$

$$= \frac{15}{36}$$

$$= \frac{5}{12}$$

2) $P(S > 3) = 1 - P(S \leq 3)$

$$= 1 - P(S = 2\ ou\ S = 3)$$

$$= 1 - \frac{1+2}{36}$$

$$= \frac{33}{36}$$

$$= \frac{11}{12}$$

3) $P(S = 7\ si\ premier\ jet\ pair) = \frac{P(S=7\ et\ premier\ jet\ pair)}{P(premier\ jet\ pair)}$

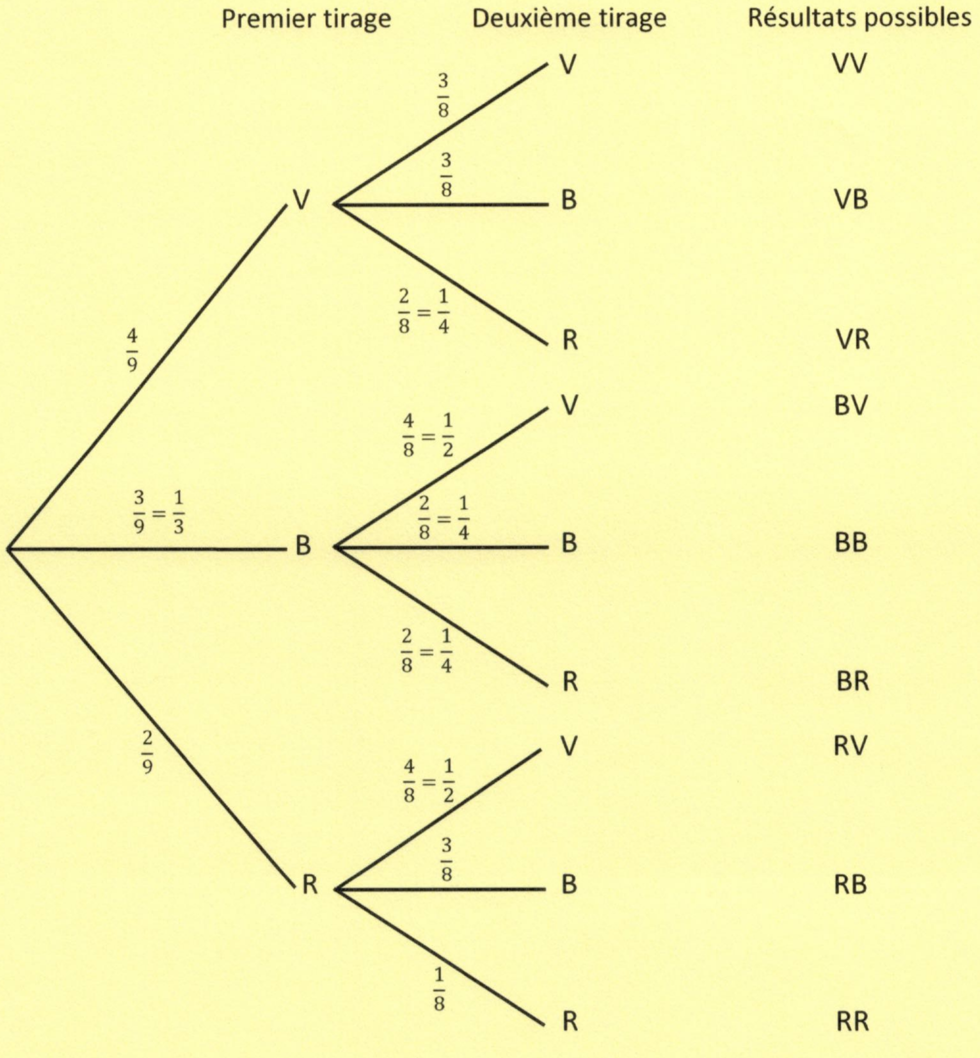
$$= \frac{\frac{3}{36}}{\frac{18}{36}}$$

$$= \frac{3}{18}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Question 7 b **(2 + 2 + 2 = 6 points)**

1) Diagramme en arbre :



2) $p(\ll \text{ tirer un jeton bleu et un jeton rouge } \gg) = P(BR) + P(RB)$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{6}$$

3) $p(\ll \text{ tirer deux jetons de la même couleur } \gg) = p(VV) + p(BB) + p(RR)$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{5}{18}$$