LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES

Sessions 2022

CORRIGÉ – BARÈME

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	CC	*Date de l'épreuve :*	15.06.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 10:10

Question 1 (au choix) (12p)

$\underbrace{3z^3+(3-11i)z^2+(18+25i)z+18-16i}_{=P(z)}=0$

L'équation admet une solution imaginaire pure. Il existe donc un réel b t.q. $P(bi)=0$.

Or :

$$\begin{aligned} & P(bi)=0 \\ \Leftrightarrow & 3(bi)^3+(3-11i)(bi)^2+(18+25i)bi+18-16i=0 \\ \Leftrightarrow & -3b^3i-3b^2+11b^2i+18bi-25b+18-16i=0 \\ \Leftrightarrow & (-3b^2-25b+18)+(-3b^3+11b^2+18b-16)i=0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -3b^2-25b+18=0 & (1) \\ -3b^3+11b^2+18b-16=0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

(2p)

De (1) : $-3b^2-25b+18=0 \quad \Leftrightarrow b_1=-9,\ b_2=\frac{2}{3} \quad (\Delta=841)$.

$b_1=-9$ dans (2) : $2900\neq 0$ donc $-9i\notin\mathcal{S}$. *(1p)*

$b_2=\frac{2}{3}$ dans (2) : $0\overset{!}{=}0$ donc $\frac{2}{3}i\in\mathcal{S}$.

Avec le schéma de HORNER :

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 3-11i & 18+25i & 18-16i \\ \hline \frac{2}{3}i & & 2i & 6+2i & -18+16i \\ \hline & 3 & 3-9i & 24+27i & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & P(z)=0 \\ \Leftrightarrow & \left(z-\frac{2}{3}i\right)\left[3z^2+(3-9i)z+24+27i\right]=0 \\ \Leftrightarrow & 3\left(z-\frac{2}{3}i\right)\underbrace{\left[z^2+(1-3i)z+8+9i\right]}_{=P_1(z)}=0 \end{aligned}$$

(3p)

Cherchons les racines de P_1 :

$$\begin{aligned} & P_1(z)=0 \\ \Leftrightarrow & z^2+(1-3i)\,z+8+9i=0 \\ & \Delta_{P_1}=(1-3i)^2-4\,(8+9i) \\ & \quad =-40-42i \end{aligned}$$

(1p)

Soit $u = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ une racine carrée complexe de Δ_{P_1}, alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -40 & (3) \\ x^2 + y^2 = 58 & (4) \\ 2xy = -42 & (5) \end{cases}$$

Avec $(3) + (4)$: $2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Avec $(4) - (3)$: $2y^2 = 98 \Leftrightarrow y^2 = 49 \Leftrightarrow y = \pm 7$

De (5) on sait que x et y sont de signes contraires.

Donc $u_1 = 3 - 7i$ et $u_2 = -3 + 7i$. *(4p)*

Finalement :

$z_1 = \frac{-(1-3i)+3-7i}{2} = 1 - 2i$

$z_2 = \frac{-(1-3i)-3+7i}{2} = -2 + 5i$

$\mathcal{S} = \left\{1 - 2i; -2 + 5i, \frac{2}{3}i\right\}$ *(1p)*

Question 2 (au choix) (12p)

a) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 + 24z^2 + 400 = 0$ **(9p)**

Posons : $t = z^2$, avec $t \in \mathbb{C}$. On obtient : $(E') \equiv t^2 + 24t + 400 = 0$. *(0,5p)*

$\Delta_{(E')} = -1024 = (32i)^2$

Donc $t = \dfrac{-24 + 32i}{2} = -12 + 16i$ ou $t = \dfrac{-24 - 32i}{2} = -12 - 16i$. *(2p)*

Revenons vers z :

* $z_1^2 = -12 + 16i$. Soit $z_1 = a_1 + b_1 i$, $(a_1, b_1 \in \mathbb{R})$, alors :

$$\begin{cases} a_1^2 - b_1^2 = -12 & (1) \\ a_1^2 + b_1^2 = 20 & (2) \\ 2a_1 b_1 = 16 & (3) \end{cases}$$

Avec $(1) + (2)$: $2a_1^2 = 8 \Leftrightarrow a_1^2 = 4 \Leftrightarrow a_1 = \pm 2$

Avec $(2) - (1)$: $2b_1^2 = 32 \Leftrightarrow b_1^2 = 16 \Leftrightarrow b_1 = \pm 4$

De (3) on sait que a_1 et b_1 sont de mêmes signes.

Donc $z_1 = 2 + 4i$ ou $z_1 = -2 - 4i$. *(4p)*

* $z_2^2 = -12 - 16i$. Soit $z_2 = a_2 + b_2 i$, $(a_2, b_2 \in \mathbb{R})$, alors :

$$\begin{cases} a_2^2 - b_2^2 = -12 & (1') \\ a_2^2 + b_2^2 = 20 & (2') \\ 2a_2 b_2 = -16 & (3') \end{cases}$$

Avec $(1') + (2')$: $2a_2^2 = 8 \Leftrightarrow a_2^2 = 4 \Leftrightarrow a_2 = \pm 2$

Avec $(2') - (1')$: $2b_2^2 = 32 \Leftrightarrow b_2^2 = 16 \Leftrightarrow b_2 = \pm 4$

De $(3')$ on sait que a_2 et b_2 sont de signes contraires.

Donc $z_2 = 2 - 4i$ ou $z_2 = -2 + 4i$. *(2p)*

Finalement : $\mathcal{S} = \{2 + 4i; -2 - 4i; -2 + 4i; 2 - 4i\}$ *(0,5p)*

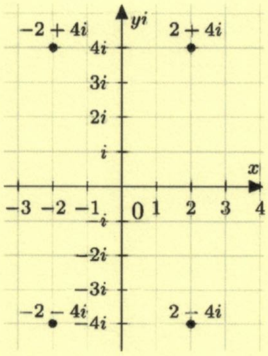
---

b) $(2+4i)(2-4i)(-2+4i)(-2-4i) = (4+16)(4+16) = 400$

<u>ou bien :</u> Le produit des racines de $P(z)$ est le terme constant de $P(z)$, donc 400. **(1p)**

---

c) **(2p)**



Question 3 **(11p)**

1) $\forall z \in \mathbb{C}:$ $(z^4-4)\left[4i-2+(3-i)\,\overline{z}\right]=0$ **(4p)**

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (z^2-2)(z^2+2)\left[4i-2+(3-i)\,\overline{z}\right]=0\\
&\Leftrightarrow (z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z^2-2i^2)\left[4i-2+(3-i)\,\overline{z}\right]=0\\
&\Leftrightarrow (z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2}i)(z+\sqrt{2}i)\left[4i-2+(3-i)\,\overline{z}\right]=0\\
&\Leftrightarrow z-\sqrt{2}=0 \text{ ou } z+\sqrt{2}=0 \text{ ou } z-\sqrt{2}i=0 \text{ ou } z+\sqrt{2}i=0 \text{ ou } \overline{z}=\frac{2-4i}{3-i}\\
&\Leftrightarrow z=\sqrt{2} \text{ ou } z=-\sqrt{2} \text{ ou } z=\sqrt{2}i \text{ ou } z=-\sqrt{2}i=0 \text{ ou } \overline{z}=1-i\\
&\Leftrightarrow z=\sqrt{2} \text{ ou } z=-\sqrt{2} \text{ ou } z=\sqrt{2}i \text{ ou } z=-\sqrt{2}i=0 \text{ ou } z=1+i
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}=\left\{\sqrt{2};-\sqrt{2};\sqrt{2}i;-\sqrt{2}i;1+i\right\}$

---

2) $z_1=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{i}{3}$, $z_2=\frac{3}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

a) $Z=\frac{(z_1)^2}{z_2}$: **(4p)**

$|z_1|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ *(1p)*

$\arg(z_1):\begin{cases}\cos\varphi_{z_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi_{z_1}=-\frac{1}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow \varphi_{z_1}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$ *(2p)*

$z_1=\frac{2}{3}\operatorname{cis}(-\frac{\pi}{6})$

Donc $Z=\dfrac{\left(\frac{2}{3}\operatorname{cis}(-\frac{\pi}{6})\right)^2}{\frac{3}{2}\operatorname{cis}(-\frac{3\pi}{4})}=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{8}{27}\operatorname{cis}(\frac{5\pi}{12})$ *(1p)*

b) Soit $u^3=Z$, alors $u=\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\operatorname{cis}(\frac{5\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3})$, avec $k\in\{0;1;2\}$. **(3p)**

- pour $k=0$: $u=\frac{2}{3}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{36}\right)$
- pour $k=1$: $u=\frac{2}{3}\operatorname{cis}\left(\frac{29\pi}{36}\right)$
- pour $k=2$: $u=\frac{2}{3}\operatorname{cis}\left(\frac{53\pi}{36}\right)$

Question 4 **(8p)**

1) Le système admet une solution unique **(4p)**

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-m & -3 & 2 \\ -2-m & 1 & -2 \\ -4 & -2m-1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \\
&\Leftrightarrow 8m^2-4m-24 \neq 0 \qquad (\Delta = 784 = 28^2) \\
&\Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2} \text{ et } m \neq 2
\end{aligned}
$$

---

2) **(4p)**

Le système devient : $\begin{cases} \frac{7}{2}x - 3y + 2z &= 1 \quad (1) \\ \frac{-1}{2}x + y - 2z &= -3 \quad (2) \\ -4x + 2y + 2z &= 6 \quad (3) \end{cases}$

$(1)+(2)$: $3x - 2y = -2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3} \quad (4)$

$(2)+(3)$: $-\frac{9}{2}x + 3y = 3 \quad (5)$

(4) dans (5) : $0 = 0$ ce qui est toujours vrai. Le système est simplement indéterminé.

(4) dans (1) : $-\frac{2}{3}y + 2z = \frac{10}{3} \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}y + \frac{5}{3}$

(5) : $y = \frac{3}{2}x + 1$.

$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{2}{3}; \beta; \frac{1}{3}\beta + \frac{5}{3} \right) | \beta \in \mathbb{R} \right\}$ *(3p)*

I.G. : Les trois équations sont celles de trois plans qui se coupent selon la droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et passant par le point $P(-\frac{2}{3}; 0; \frac{5}{3})$. *(1p)*

<u>Autres possibilités :</u>

$\mathcal{S} = \left\{ \left(\alpha; \frac{3}{2}\alpha + 1; \frac{1}{2}\alpha + 2 \right) | \alpha \in \mathbb{R} \right\}$; $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $P(0; 1; 2)$.

$\mathcal{S} = \{ (2\gamma - 4; 3\gamma - 5; \gamma) | \gamma \in \mathbb{R} \}$; $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $P(-4; -5; 0)$.

Question 5 (10p)

1) $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Π. **(3p)**

$d \perp \Pi$ donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de d.

Soit $M(x;y) \in d$. Avec $A \in d$, $\vec{n}$ est un vecteur directeur de d

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ coli $\vec{u}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \vec{u} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 3\alpha \\ y-7 = \alpha \\ z-6 = -5\alpha \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

On obtient comme système d'équations paramétriques de d :

$$d \equiv \begin{cases} x = 3\alpha - 3 \\ y = \alpha + 7 \\ z = -5\alpha + 6 \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}.$$

En substituant $\alpha = y - 7$, on obtient un système d'équations cartésiennes :

$$d \equiv \begin{cases} x = 3y - 24 \\ z = -5y + 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 24 = 0 \\ 5y + z - 41 = 0 \end{cases}.$$

(troisième équation : $5x + 3z - 3 = 0$)

---

2) **(3p)**

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \frac{3}{5}\alpha + \frac{1}{3}\beta - \frac{3}{5} \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de Π et $M(0;0;-\frac{3}{5}) \in \Pi$.

<u>autres solutions :</u>

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{3}\beta + \frac{5}{3}\gamma + 1 \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases} \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{R}.\ \vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } M(1;0;0).$$

<u>*ou bien :*</u>

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -3\alpha + 5\gamma + 3 \\ z = \gamma \end{cases} \qquad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}.\ \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix} \text{ et } M(0;3;0).$$

---

3) **(4p)**

$\Pi \cap d = \{B(x_B; y_B; z_B)\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_B + y_B - 5z_B - 3 = 0 & (1) \\ x_B = 3y_B - 24 & (2) \\ z_B = -5y_B + 41 & (3) \end{cases}$$

(3) et (2) dans (1) : $9y_B - 72 + y_B + 25y_B - 205 - 3 = 0 \Leftrightarrow 35y_B = 280 \Leftrightarrow y_B = 8$.

$y_B = 8$ dans (2) : $x_B = 24 - 24 = 0$.

$y_B = 8$ dans (3) : $z_B = -40 + 41 = 1$. $\qquad \mathcal{S} = \{(0;8;1)\}$. Donc $B(0;8;1)$.

Question 6 **(13p)**

1) Tirage successif sans remise de 3 boules parmi 12 : $\#\Omega = A_{12}^3 = \frac{12!}{9!} = 1\,320$.

a. $\#A = \underbrace{A_3^3}_{\text{position}} \cdot \underbrace{A_3^1}_{\text{boule rouge}} \cdot \underbrace{A_5^1}_{\text{boule bleue}} \cdot \underbrace{A_4^1}_{\text{boule jaune}} = 360.$ **(2p)**

$P(A) = \frac{360}{1320} = \frac{3}{11} \approx 0{,}27.$

b. $\#B = \underbrace{A_3^3}_{\text{3 boules rouges}} + \underbrace{A_5^3}_{\text{3 boules bleues}} + \underbrace{A_4^3}_{\text{3 boules jaunes}} = 90.$ **(2p)**

$P(B) = \frac{90}{1320} = \frac{3}{44} \approx 0{,}07.$

c. $\overline{C}$: « Ne tirer aucune boule jaune. »

$\#\overline{C} = A_8^3 = 336.$ **(2p)**

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{336}{1320} = \frac{41}{55} \approx 0{,}75.$

d. $\#D = \underbrace{A_8^2}_{\text{2 boules non jaunes}} \cdot \underbrace{A_4^1}_{\text{boule jaune}} \cdot \underbrace{1}_{\text{Position de la boule jaune}} = 224.$ **(2p)**

$P(D) = \frac{224}{1320} = \frac{28}{165} \approx 0{,}17.$

---

2) Tirage successif avec remise de 3 boules parmi 12 : $\#\Omega = B_{12}^3 = 12^3 = 1\,728$.

a. $\#E = \underbrace{B_7^3}_{\text{boules non bleues}} = 7^3 = 343.$ **(2p)**

$P(E) = \frac{343}{1728} \approx 0{,}2.$

b. $\#F = \underbrace{3}_{\text{Position}} \cdot (\underbrace{B_3^2}_{\text{2 boules rouges}} \cdot \underbrace{B_9^1}_{\text{1 autre boule}} + \underbrace{B_5^2}_{\text{2 boules bleues}} \cdot \underbrace{B_7^1}_{\text{1 autre boule}} + \underbrace{B_4^2}_{\text{2 boules jaunes}} \cdot \underbrace{B_8^1}_{\text{1 autre boule}})$ **(3p)**

$= 3 \cdot (3^2 \cdot 9 + 5^2 \cdot 7 + 4^2 \cdot 8) = 1152.$

$P(E) = \frac{1152}{1728} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67.$

Question 7 **(6p)**

a. Nombre de mains possibles $= C_{32}^{10} = 64\,512\,240$. (Tirage simultané sans remise) **(1p)**

b. Nombre de mains qui contiennent les quatre valets $= \underbrace{C_4^4}_{\text{4 valets}} \cdot \underbrace{C_{28}^6}_{\text{6 autres cartes}} = 376\,740.$ **(1p)**

c. Nombre de mains qui ne contiennent que des cartes noires $= C_{16}^{10} = 8\,008.$ **(1p)**

d. Nombre de mains qui contiennent exactement trois carreaux et deux dames **(3p)**

$= \underbrace{C_7^3}_{\text{carreaux sans dames}} \cdot \underbrace{C_3^2}_{\text{dames sans carreaux}} \cdot \underbrace{C_{21}^5}_{\text{autres cartes}} \cdot \underbrace{C_1^0}_{\text{dame de carreau}}$

$+ \underbrace{C_1^1}_{\text{dame de carreau}} \cdot \underbrace{C_7^2}_{\text{carreaux sans dames}} \cdot \underbrace{C_3^1}_{\text{dames sans carreaux}} \cdot \underbrace{C_{21}^6}_{\text{autres cartes}}$

$= 5\,555\,277.$
