LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 2	CC	*Date de l'épreuve :*	13.06.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 11:10
		Numéro du candidat :	

Instructions

- L'élève répond à toutes les questions de la partie obligatoire.
- L'élève répond à exactement 1 question de la partie au choix. Il indique obligatoirement son choix en marquant d'une croix la case appropriée ci-dessous.

Seule la réponse correspondant à la question choisie par l'élève sera évaluée. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix renseigné sur la page de garde la partie au choix est cotée à 0 point.

Partie obligatoire (51 points)			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Obligatoire**
1	4	Question de cours	X
2	12	Inéquation, équation, limite	X
3	20	Etude de fonction	X
4	15	Intégrales	X
Partie au choix (9 points)			
Choisissez 1 question parmi les 2 suivantes et indiquez votre choix avec un X			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Choix du candidat**
5	9	Limites et asymptotes	
6	9	Limites et asymptotes	

Question 1 **[4 points]**

Démontrez la propriété suivante :

Si F et G sont des primitives de f sur un intervalle I inclus dans le domaine de continuité de f, alors il existe une constante C telle que $F(x) - G(x) = C$, pour tout réel x de I.

Question 2 **[5+4+3=12 points]**

1) Résolvez l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$: $\log_{\sqrt{3}}(1+2x) + \log_{\frac{1}{3}}(1-x) \leq \log_3(1-2x)$

2) Résolvez l'équation suivante dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{-1-e^{-2x}}{1+e^{2x}} + \dfrac{1}{4} = 0$

3) Calculez la limite suivante : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+5}\right)^{\frac{1}{2}x+1}$

Question 3 **[(4+1,5+5,5+1+3)+5=20 points]**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 6x + 10)e^{x-1}$.

1) (a) Déterminez le domaine de définition de f et étudiez son comportement asymptotique.

   (b) Montrez que $f'(x) = \dfrac{(x-2)^2}{2}e^{x-1}$.

   (c) Déterminez la dérivée seconde de f et établissez le tableau de variation et de concavité complet de f en indiquant les extrema et points d'inflexion éventuels.

   (d) Déterminez l'équation réduite de la tangente t au graphique G_f de la fonction f au point d'abscisse 0.

   (e) Représentez graphiquement G_f et t dans un repère orthonormé d'unité 1 cm (respectivement 2 carreaux).

2) Calculez l'aire de la partie du plan délimitée par G_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 3$. Indiquez la valeur exacte ainsi qu'une valeur approchée au centième près de cette aire.

Question 4 [5+5+5=15 points]

Calculez les valeurs exactes des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{3\ln x - 2x^2\ln^2 x}{x^3}\,dx$

2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1+\cos^2 x)\sin^3 x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x^2+12x}{(4x^2+1)(4x+1)}\,dx,$

après avoir déterminé les réels a, b et c tels que $\dfrac{8x^2+12x}{(4x^2+1)(4x+1)} = \dfrac{ax+b}{4x^2+1} + \dfrac{c}{4x+1}$.

Question 5 (au choix) [6+3=9 points]

On donne la fonction f définie par $f(x) = 2x - 1 - 3\ln\dfrac{x}{x+2}$.

1) Déterminez le domaine de définition de f et étudiez le comportement asymptotique de f aux bornes du domaine de f.
2) Etudiez la position du graphique G_f de f par rapport à ses asymptotes éventuelles.

Question 6 (au choix) [2+5+2=9 points]

On donne la fonction f définie par $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$.

1) Etudiez le comportement asymptotique de G_f en $-\infty$.
2) Etudiez le comportement asymptotique de G_f en $+\infty$.
3) Etudiez la position de G_f par rapport à son asymptote en $-\infty$.

Examen de fin d'études secondaires Sections B, C, D, E, F

Formules trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$