



DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	CD	Date de l'épreuve :	15.06.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 10:10

I.

- 1) Soit bi ($b \in \mathbb{R}$) une racine imaginaire pure de P .

$$P(bi) = 0 \Leftrightarrow (bi)^3 + (2 - 11i)(bi)^2 - 3(13 + 5i)(bi) - 18(1 - 3i) = 0$$

$$\Leftrightarrow -ib^3 - 2b^2 + 11b^2i - 39bi + 15b - 18 + 54i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^3 + 11b^2 - 39b + 54 = 0 & (pi) \\ -2b^2 + 15b - 18 = 0 & (pr) \end{cases}$$

$$(pr) \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} \vee b = 6.$$

Dans (pi) : $-\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 11 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 39 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 54 = \frac{135}{8}$ et
 $-(6)^3 + 11 \cdot (6)^2 - 39 \cdot (6) + 54 = 0.$

$$z_0 = 6i.$$

Schéma de Horner:

	1	$2 - 11i$	$-39 - 15i$	$-18 + 54i$
$6i$		$6i$	$30 + 12i$	$18 - 54i$
	1	$2 - 5i$	$-9 - 3i$	0

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 6i \text{ ou } z^2 + (2 - 5i)z - (9 + 3i) = 0.$$

$$\Delta = (2 - 5i)^2 + 4 \cdot (9 + 3i) = 15 - 8i.$$

Soit $\delta = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) une racine carrée complexe de $15 - 8i$.

$$\text{Alors } \begin{cases} x^2 + y^2 = |15 - 8i| = 17 & (1) \\ x^2 - y^2 = 15 & (2) \\ 2xy = -8 < 0 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) $\Rightarrow x = \pm 4$; (1) - (2) $\Rightarrow y = \pm 1$; de (3), x et y ont des signes contraires.

$$\delta = \pm(4 - i).$$

Les solutions du trinôme du second degré sont $\frac{-2 + 5i \pm (4 - i)}{2} = \begin{cases} 1 + 2i \\ -3 + 3i \end{cases}$

$$S = \{6i; 1 + 2i; -3 + 3i\}$$

- 2) Posons $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Alors :

$$-2iz - \bar{z} = -1 + i \Leftrightarrow -2i(a + bi) - (a - bi) = -1 + i$$

$$\Leftrightarrow -2ai + 2b - a + bi = -1 + i$$

$$\Leftrightarrow -a + 2b + (-2a + b)i = -1 + i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = -1 \\ -2a + b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = -1 \\ 3a = -3 \end{cases}$$

$$(2) / (1) - 2(2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$S = \{-1 - i\}$$

II.

1)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ m+1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m+1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= m - 4 + m + 1 - 2 - 1 + 2m^2 + 2m$$

$$= 2m^2 + 4m - 6$$

$$= 2(m^2 + 2m - 3)$$

$$= 2(m-1)(m+3)$$

$$\det A = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -3$$

Le système admet une solution unique si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$.

2)

Si $m = 1$, $\det A = 0$ et le système n'admet pas une solution unique.

$$(s) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y - z = 3 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 5y - z = -5 \end{cases}$$

(2)/2 · (1) - (2)

Le système est simplement indéterminé.

Posons $y = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

De (2) : $z = 5\alpha + 5$.

Dans (1) : $x = -2\alpha + 5\alpha + 5 - 1 \Leftrightarrow x = 3\alpha + 4$.

$$S = \{(3\alpha + 4; \alpha; 5\alpha + 5) / \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plans se coupant

suivant une droite passant par le point $B(4; 0; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$5\alpha + 5 = k$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{5}k - 1$$

$$z = 5\alpha + 5 = k$$

$$y = \frac{1}{5}k - 1$$

$$x = 3\left(\frac{1}{5}k - 1\right) + 4$$

3)

Si $m = 3$, $\det A \neq 0$ et le système admet une solution unique.

$$(s) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 4x - y - z = 3 \\ 2x - y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 9y - 3z = -7 \\ 5y + z = -5 \end{cases}$$

(2)/4 · (1) - (2)
(3)/2 · (1) - (3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 9y - 3z = -7 \\ 24y = -22 \end{cases}$$

(3)/(2) + 3 · (3)

$$\text{De (3) : } y = -\frac{11}{12}$$

Dans (2) :

$$-\frac{33}{4} - 3z = -7 \Leftrightarrow 3z = -\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{5}{12}$$

$$\text{Dans (1) : } x = \frac{22}{12} - \frac{5}{12} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{12}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{5}{12}; -\frac{11}{12}; -\frac{5}{12} \right) \right\}$$

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plans ayant un

unique point en commun à savoir le point $I \left(\frac{5}{12}; -\frac{11}{12}; -\frac{5}{12} \right)$.

$$\frac{3}{5}\alpha + 1$$

III.

$$1) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) / \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) / \begin{cases} -3 = k \cdot (-2) \\ -5 = k \cdot 4 \\ -4 = k \cdot 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) / \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ k = -\frac{5}{4} \\ k = -4 \end{cases} \text{ impossible}$$

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires ; les points A , B et C ne sont pas alignés.

$$M(x; y; z) \in \pi \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ y-2 & 4 & -5 \\ z-1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ y-2 & 4 \\ z-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -16(x-1) + 10(z-1) - 3(y-2) + 12(z-1) + 5(x-1) - 8(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -11(x-1) - 11(y-2) + 22(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) + (y-2) - 2(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2z - 1 = 0$$

$$\pi \equiv x + y - 2z - 1 = 0$$

$$2) \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } \pi, \text{ donc un vecteur directeur de } d.$$

Un système d'équations paramétriques de d est donc :

$$d \equiv \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 2 \\ z = -2\alpha + 1 \end{cases} \text{ avec } (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$3) \text{ Les plans } \pi \text{ et } \pi' \text{ sont parallèles, donc } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ est aussi un vecteur normal à } \pi'.$$

$$M(x; y; z) \in \pi' \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \perp \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6) \cdot 1 + (y-1) \cdot 1 + (z+2) \cdot (-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2z - 11 = 0$$

$$\pi' \equiv x + y - 2z - 11 = 0$$

4)

$$\begin{aligned}
 M(x; y; z) \in d \cap \pi' &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 2 \\ z = -2\alpha + 1 \\ x + y - 2z - 11 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 2 \\ z = -2\alpha + 1 \\ \alpha + 1 + \alpha + 2 + 4\alpha - 2 - 11 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 2 \\ z = -2\alpha + 1 \\ 6\alpha = 10 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = -\frac{5}{3} \\ \alpha = \frac{5}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

d perce le plan π' au point $I\left(\frac{8}{3}; \frac{11}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

 5) Un vecteur normal au plan π est un vecteur directeur de π'' .

$$\begin{aligned}
 M(x; y; z) \in \pi'' &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \vec{n}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y-2 & 4 & 1 \\ z-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ y-2 & 4 \\ z-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{aligned} &-8(x-1) - 2(z-1) + (y-2) \\ &-4(z-1) - (x-1) - 4(y-2) = 0 \end{aligned} \\
 &\Leftrightarrow -9(x-1) - 3(y-2) - 6(z-1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3(x-1) + (y-2) + 2(z-1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3x + y + 2z - 7 = 0
 \end{aligned}$$

$$\pi'' \equiv 3x + y + 2z - 7 = 0$$

 6) La droite p est une droite du plan π' . En fait, $p = (ID)$.

 Un vecteur directeur de la droite p est $\overrightarrow{ID}\left(\frac{10}{3}; -\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

 D'où un système d'équations paramétriques de la droite p :

$$p \equiv \begin{cases} x = \frac{10}{3}\alpha + 6 \\ y = -\frac{8}{3}\alpha + 1 \text{ avec } (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = \frac{1}{3}\alpha - 2 \end{cases}$$

IV.

1)

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{4\sqrt{3} + 20i}{-1 + 3i\sqrt{3}} \cdot \frac{-1 - 3i\sqrt{3}}{-1 - 3i\sqrt{3}} \\
 &= \frac{-4\sqrt{3} - 36i - 20i + 60\sqrt{3}}{1 + 27} \\
 &= \frac{56\sqrt{3} - 56i}{28} \\
 &= 2\sqrt{3} - 2i \quad \text{f.a. de } z_1 \qquad |2\sqrt{3} - 2i| = 4 \\
 &= 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\
 &= 4\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{f.t. de } z_1
 \end{aligned}$$

2)

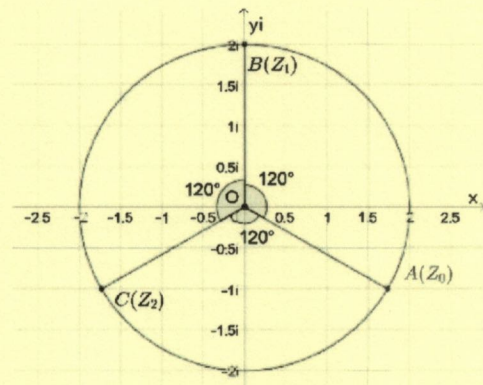
$$\begin{aligned}
 z_2 &= -4\sqrt{3}\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= 4\sqrt{3}\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{f.t. de } z_2 \\
 \frac{(z_1)^5}{(z_2)^4} &= \frac{\left(4\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^5}{\left(4\sqrt{3}\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)^4} \\
 &= \frac{4^5 \cdot \text{cis}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}{(4\sqrt{3})^4 \cdot \text{cis}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)} \\
 &= \frac{4}{9} \text{cis}\left(-\frac{5\pi}{6} + \frac{8\pi}{3}\right) \\
 &= \frac{4}{9} \text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{9} - \frac{2}{9}i
 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
 z_3 &= 2\sqrt{3} - 2i + 4\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
 &= 2\sqrt{3} - 2i - 2\sqrt{3} - 6i \\
 &= -8i \\
 &= 8\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

 Les racines cubiques complexes de z_3 sont :

$$\begin{aligned}
 Z_k &= 2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{avec } k \in \{0;1;2\} \\
 Z_0 &= 2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i \\
 Z_1 &= 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i \\
 Z_2 &= 2\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i
 \end{aligned}$$



V.

1)

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{9\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{5 + i\sqrt{3}} \cdot \frac{5 - i\sqrt{3}}{5 - i\sqrt{3}} \\
 &= \frac{45\sqrt{2} - 9i\sqrt{6} - 5i\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{25 + 3} \\
 &= \frac{42\sqrt{2} - 14i\sqrt{6}}{28}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \quad \text{f.a. de } z_1$$

$$\left| \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \right| = \sqrt{\frac{18}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{6}$$

$$= \sqrt{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$= \sqrt{6} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{f.t. de } z_1$$

et

$$Z = \frac{(\sqrt{6})^8 \operatorname{cis}\left(-\frac{8\pi}{6}\right)}{6 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{6^4 \operatorname{cis}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}{6 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$= 6^3 \frac{\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$= 216 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 216 \operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{12}\right) \quad \text{f.t. de } Z.$$

2)

$$Z = 216 \frac{\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$= 216 \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

$$= 216 \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

$$= 216 \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2} - i\sqrt{6} + \sqrt{6}}{4}$$

$$= 54(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + 54(\sqrt{2} - \sqrt{6})i \quad \text{f.a. de } Z.$$

3)

$$216 \operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{12}\right) = 54(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + 54(\sqrt{2} - \sqrt{6})i \Leftrightarrow \operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}i$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{8-4\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3}-2$$

4)

$$2 \cdot z_1 + z_2 = 2 \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right) + 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= 3\sqrt{2} - i\sqrt{6} - 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$$

$$= (3\sqrt{2} - \sqrt{6})i$$

$$\text{et } (2 \cdot z_1 + z_2)^2 = -(3\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 \in \mathbb{R}_-$$