LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	CD	*Date de l'épreuve :*	15.06.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 10:10
		Numéro du candidat :	

Instructions

- L'élève indique son numéro de candidat dans le tableau ci-dessus.
- L'élève répond à toutes les questions de la partie obligatoire.
- L'élève répond à exactement 1 question de la partie au choix. Il indique obligatoirement son choix en marquant d'une croix la case appropriée ci-dessous.

Seule la réponse correspondant à la question choisie par l'élève sera évaluée. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix renseigné sur la page de garde la partie au choix est cotée à 0 point.

Partie obligatoire (48 points)			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Obligatoire**
I	**17**	**Nombres complexes**	**X**
II	**14**	**Systèmes linéaires**	**X**
III	**17**	**Géométrie analytique de l'espace**	**X**
Partie au choix (12 points)			
Choisissez 1 question parmi les 2 suivantes et indiquez votre choix avec un X			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Choix du candidat**
IV	**12**	**Nombres complexes**	
V	**12**	**Nombres complexes**	

QUESTION I (Question obligatoire) **(17 (13+4) points)**

1) On donne le polynôme P à coefficients complexes :

$$P(z) = z^3 + (2 - 11i)z^2 - 3(13 + 5i)z - 18(1 - 3i).$$

Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sachant que le polynôme P admet une racine imaginaire pure.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$-2iz - \bar{z} = -1 + i$$

QUESTION II (Question obligatoire) **(14 (4+5+5) points)**

On donne le système :

$$(s)\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ (m+1)x - y - z = 3 \\ 2x - y - mz = 3 \end{cases}$$

1) Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour lesquelles le système (s) admet une solution unique.
2) Résoudre et interpréter géométriquement le système (s) pour $m = 1$.
3) Résoudre et interpréter géométriquement le système (s) pour $m = 3$.

QUESTION III (Question obligatoire) **(17 (4+2+2+2+4+3) points)**

Dans un repère orthonormé de l'espace on considère les points $A(1;2;1)$, $B(-1;6;2)$ et $C(-2;-3;-3)$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan $\pi = (ABC)$ après avoir vérifié que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d perpendiculaire au plan π et passant par le point A.
3) Déterminer une équation cartésienne du plan π' parallèle au plan π et passant par le point $D(6;1;-2)$.
4) Déterminer l'intersection de la droite d avec le plan π'.
5) Déterminer une équation cartésienne du plan π'' perpendiculaire au plan π et contenant les points A et B.
6) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite p perpendiculaire à la droite d passant par le point D.

QUESTION IV (Question au choix) **(12 (4+4+4) points)**

Soient $z_1 = \frac{4\sqrt{3} + 20i}{-1 + 3i\sqrt{3}}$ et $z_2 = -4\sqrt{3}cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

1) Écrire z_1 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2) Calculer $\frac{(z_1)^5}{(z_2)^4}$ et écrire le résultat sous forme algébrique.

3) Calculer les racines cubiques complexes de $z_3 = z_1 + z_2$ et écrire les résultats sous forme algébrique.

   Porter les points dont les affixes sont les racines trouvées dans le plan de Gauss.

QUESTION V (Question au choix) **(12 (5+3+2+2) points)**

On donne les nombres complexes : $z_1 = \frac{9\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{5 + i\sqrt{3}}$, $z_2 = 6cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $Z = \frac{{z_1}^8}{z_2}$.

1) Écrire z_1 et Z sous forme trigonométrique.

2) Écrire Z sous forme algébrique.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

4) Démontrer que $(2 \cdot z_1 + z_2)^2$ est un nombre réel strictement négatif.