



DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	CB	Date de l'épreuve :	20.09.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 11:25

Question 1 (obligatoire) : $8(= 2+3+3) + 13(=8+5) = 21$ points

1) Soit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \text{cis } \frac{2\pi}{3}$

a) Les racines cubiques de $1 = \text{cis } 0$ sont $z_k = \text{cis } \frac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$

Ainsi : $z_0 = \text{cis } 0 = 1$,

$$z_1 = \text{cis } \frac{2\pi}{3} = j \quad \text{et}$$

$$z_2 = \text{cis } \frac{4\pi}{3} = \left(\text{cis } \frac{2\pi}{3} \right)^2 = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

(2 pts)

De plus $1+j+j^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

b) On a $j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{j}$ et $\frac{1}{j} = \frac{1}{\text{cis } \frac{2\pi}{3}} = \text{cis } \frac{-2\pi}{3} = \text{cis } \frac{4\pi}{3} = j^2$.

Par ailleurs, $j^{2023} = (j^3)^{674} \cdot j = j$ car $j^3 = 1$ et $\left(\frac{1}{1+j} \right)^9 = \left(\frac{1}{-j^2} \right)^9 = (-j)^9 = -(j^3)^3 = -1$

(3 pts)

c) ABC est équilatéral car $AB = |b - a| = |-3 + \sqrt{3}i| = \sqrt{12}$, $AC = |c - a| = |-3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{12}$ et

$$BC = |b - c| = |0 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{12}.$$

De plus, $a+bj+cj^2 = a+bj+c(-1-j)$

$$= a - c + (b - c)j = 3 + i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

(3 pts)

$$= 3 + i\sqrt{3} - i\sqrt{3} - 3 = 0$$

2) Dans \mathbb{C} on considère le polynôme P défini par

$$P(z) = z^3 - [2m + i(1 + 4m)]z^2 + 2m[-2 + i(1 + 4m)]z + 8m^2 \quad \text{où } m \text{ est un paramètre complexe}$$

a) On a $P(i) = i^3 - [2m + i(1 + 4m)]i^2 + [-4m + 2mi(1 + 4m)]i + 8m^2$

$$= -i + 2m + i(1 + 4m) - 4mi - 2m(1 + 4m) + 8m^2$$

$$= -i + 2m + i + 4mi - 4mi - 2m - 8m^2 + 8m^2 = 0$$

Comme i est une racine de P , $P(z)$ est divisible par $z-i$

Schéma de Horner

	1	$-2m-i-4mi$	$-4m+2mi+8m^2i$	$8m^2$
i		i	$4m-2mi$	$-8m^2$
	1	$-2m-4mi$	$8m^2i$	0

Et $P(z) = (z-i) [z^2 - 2m(1+2i)z + 8m^2i]$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z=i$ ou $Q(z) = z^2 - 2m(1+2i)z + 8m^2i = 0$

Le discriminant de $Q(z)=0$ est $\Delta = 4m^2(1+2i)^2 - 32 m^2i = 4m^2 (-3-4i)$

On cherche $x+yi$, RCC de $-3-4i$ vérifiant $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ 2xy = -4 & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{25} = 5 & (3) \end{cases}$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(1)+(3) : 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x=1$ ou $x = -1$

$(3)-(1) : 2y^2=8 \Leftrightarrow y=2$ ou $y = -2$

Par (2), on sait que x et y sont de signes contraires.

Les RCC de $-3-4i$ sont $1-2i$ et $-1+2i$, par conséquent les RCC de Δ sont $2m(1-2i)$ et $-2m(1-2i)$.

Les racines de Q sont $z_1 = \frac{2m(1+2i) + 2m(1-2i)}{2} = \frac{4m}{2} = 2m$ et $z_2 = \frac{2m(1+2i) - 2m(1-2i)}{2} = \frac{8mi}{2} = 4mi$

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$ est $S = \{ i ; 2m ; 4mi \}$ (8 pts)

b) On considère $A(i)$, $B(2m)$ et $C(4mi)$ avec $m \in \mathbb{C}$

1. $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \Leftrightarrow \frac{4mi - i}{2m - i} = i \Leftrightarrow 4mi - i = 2mi + 1$

$\Leftrightarrow m = \frac{1+i}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Dans ce cas, on a $\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \arg i = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(AB) \perp (AC)$ (2,5 pts)

2. On a $B(2m)$, soit $B(1-i)$ ou $B\left(\sqrt{2}\text{cis}\frac{-\pi}{4}\right)$ et $C(4mi)$ soit $C(2+2i)$ ou $C\left(2\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)$.

Les affixes de M et N s'obtiennent en multipliant celles de B et C par $\text{cis}\frac{\pi}{4}$.

Ainsi $z_M = \sqrt{2}\text{cis}\frac{-\pi}{4} \cdot \text{cis}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\text{cis}0 = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Et $z_N = 2\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4} \cdot \text{cis}\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{2} = 2\sqrt{2}i \in i\mathbb{R}$. (2,5 pts)

Question II (obligatoire) : 2+4+7+3 = 16 points

1) Il y a C_{10}^3 pour placer les 1, ensuite C_7^3 pour placer les 2, les 3 prennent les places restantes.

En tout : $C_{10}^3 C_7^3 = 120 \cdot 35 = 4200$ moyens de placer ces 3 chiffres, donc 4200 nombres différents. (2 pts)

Calcul direct : $\frac{10!}{3!3!4!} = 4200$ nombres différents.

2) a) $p(\text{deux « 3 » et un « 2 »}) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{20} = 15\%$ (1,5 pts)

b) $p(\text{au moins 2 jetons portent des numéros différents})$

$$= 1 - p(\text{3 jetons de numéros identiques}) = 1 - \frac{C_3^3 + C_3^3 + C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{19}{20} = 95\%$$

ou bien: $p(2 \text{ « 1 » ou } 2 \text{ « 2 » ou } 2 \text{ « 3 » ou « 1, 2 et 3 »}) = \frac{2C_3^2 C_7^1 + C_4^2 C_6^1 + C_3^1 C_3^1 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{19}{20}$ (2,5 pts)

3) a) Gains possibles : $X \in \{2; 4; 6; -2; -3\}$ (1 pt)

b) $X=2$: si on tire 2 jetons marqués « 1 », donc $p(X=2) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}$

$X=4$: si on tire 2 jetons marqués « 2 », donc $p(X=4) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}$

$X=6$: si on tire 2 jetons marqués « 3 », donc $p(X=6) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$

$X=-2$: si on tire 1 jeton marqué « 2 » et un marqué « 1 », donc $p(X=-2) = \frac{C_3^1 C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}$

$X=-3$: si on tire 1 jeton marqué « 3 » et un différent de « 3 », donc $p(X=-3) = \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$

Loi de probabilité

x_i	-3	-2	2	4	6
$p_i = p(X=x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$

(4 pts)

c) Espérance mathématique :

$$E(X) = 2p(X=2) + 4p(X=4) + 6p(X=6) - 2p(X=-2) - 3p(X=-3) = \frac{-12}{15} = -\frac{4}{5} = -0,80 \text{ €}$$

En moyenne, on perd en jouant à ce jeu donc le jeu est défavorable au joueur.

(2 pts)

4) Expérience de Bernoulli ; succès (on obtient 1) : $p = \frac{3}{10}$; échec (on obtient 2 ou 3) : $q = \frac{7}{10}$

On répète 20 fois l'expérience. Si X est le nombre de succès, X suit la loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{3}{10}$

$$p(8 \leq X \leq 12) = \sum_{k=8}^{12} C_{20}^k \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{20-k} = \frac{1}{10^{20}} \sum_{k=8}^{12} C_{20}^k 3^k 7^{20-k} \approx 22,6 \%$$

(3 pts)

Question III (obligatoire) 2+5+2= 9 points

a) $P \equiv y^2 + 2x + 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y+3)^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow (y+3)^2 = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)$

Posons $\begin{cases} X = x - \frac{5}{2} \\ Y = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + \frac{5}{2} \\ y = Y - 3 \end{cases}$ et $S\left(\frac{5}{2}; -3\right)$

Dans le repère (S, \vec{i}, \vec{j}) : $P \equiv Y^2 = -2X$

(2 pts)

b) $\Gamma \equiv 3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 28 = 0$

$\Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 + 6y + 9) + 28 - 12 - 18 = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)^2 + 2(y+3)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{\frac{2}{3}} + \frac{(y+3)^2}{1} = 1$

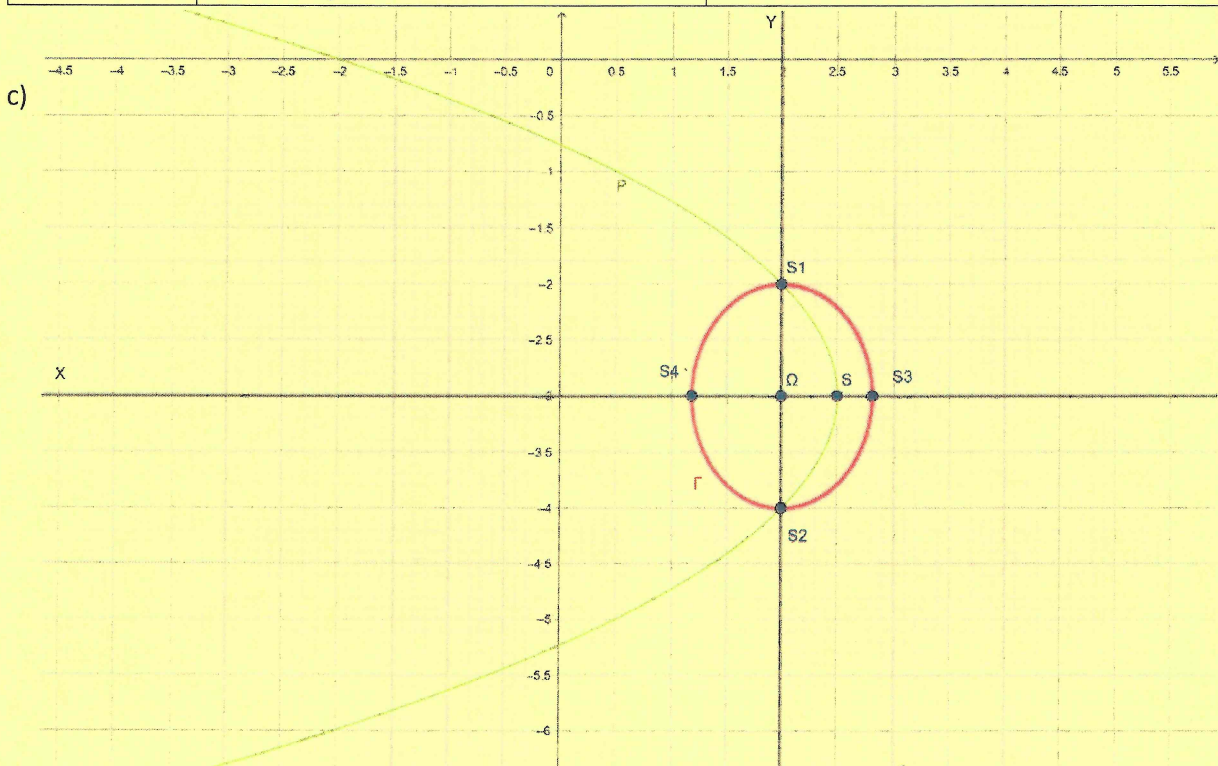
En posant $\Omega(2; -3)$, $X = x - 2$ et $Y = y + 3$ l'équation de Γ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ est $\frac{X^2}{\frac{2}{3}} + \frac{Y^2}{1} = 1$.

$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $b = 1$ et $c^2 = b^2 - a^2 = \frac{1}{3}$ et l'excentricité vaut $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Γ est une ellipse de centre Ω d'axe focal (ΩY) . Éléments caractéristiques :

(5 pts)

	$(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$	(O, \vec{i}, \vec{j})
Axe focal	$(\Omega Y) \equiv X=0$	$x=2$
Foyers	$F\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et $F'\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$F\left(2; \frac{\sqrt{3}-9}{3}\right)$ et $F'\left(2; -\frac{\sqrt{3}+9}{3}\right)$
Sommets	$S_1(0,1), S_2(0,-1),$ $S_3\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; 0\right), S_4\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; 0\right),$	$S_1(2,-2)$ et $S_2(2,-4),$ $S_3\left(2 + \frac{\sqrt{6}}{3}; -3\right), S_4\left(2 - \frac{\sqrt{6}}{3}; -3\right)$
Directrices	$d_F : Y = \frac{b^2}{c} = \sqrt{3}$ et $d_{F'} : Y = -\sqrt{3}$	$d_F : y = \sqrt{3} - 3$ et $d_{F'} : y = -\sqrt{3} - 3$



(2 pts)

Question IV (obligatoire) : 5 points

$$a) \Gamma \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = f(t) = -2 \tan t \\ y = g(t) = \frac{3}{\cos t} \end{array} \right. \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

Pour $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ on a $f(-t) = -2 \tan(-t) = 2 \tan t = -f(t)$ et $g(-t) = g(t)$

On en déduit que la courbe Γ admet l'axe des y comme axe de symétrie

(1 pt)

$$b) \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \tan t \\ y = \frac{3}{\cos t} \end{array} \right. , t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{-2} = \tan t \\ \frac{y}{3} = \frac{1}{\cos t} \end{array} \right. , t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

Comme $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ on a $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$

$$\text{De plus } \left(\frac{x}{-2} \right)^2 - \left(\frac{y}{3} \right)^2 = \tan^2 t - \frac{1}{\cos^2 t} = \tan^2 t - (1 + \tan^2 t) = -1.$$

Ainsi une équation cartésienne de Γ est $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ ($y > 0$) et Γ est la branche d'hyperbole d'axe focal (Oy) située au-dessus de l'axe des x .

(4 pts)

Question V (question au choix) : 4+1+4= 9 points

$$1) \text{ Déterminons les points d'intersection de } d \text{ et } \mathcal{H} : \begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 36 \\ y = x + b \end{cases}$$

Par substitution on obtient : $4x^2 - 9(x+b)^2 = 36 \Leftrightarrow 5x^2 + 18bx + (36 + 9b^2) = 0$

Le nombre de points d'intersection dépend du signe de $\Delta = 18^2 b^2 - 20(36 + 9b^2) = 144(b^2 - 5)$:

si $b \in]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[: \Delta > 0$ donc d et \mathcal{H} sont sécantes en deux points,

si $b \in \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\} : \Delta = 0$ donc d est tangente à \mathcal{H} ,

si $b \in]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[: \Delta < 0$ donc d est extérieure à \mathcal{H} .

(4 pts)

$$2) \text{ Une équation de la tangente à } \mathcal{H} \equiv 4x^2 - 9y^2 = 36 \text{ au point } A \left(\frac{9\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) \text{ est } 4x \cdot \frac{9\sqrt{5}}{5} - 9y \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = 36 \text{ ou}$$

$$\sqrt{5}x - \sqrt{5}y = 5 \text{ c'est-à-dire } y = x - \sqrt{5}.$$

Remarque : on retrouve $y = x + b$ avec $b = -\sqrt{5}$ traité en a)

(1 pt)

3) Une équation de la tangente à \mathcal{H} au point $I(x_0, y_0)$ est $t \equiv 4xx_0 - 9yy_0 = 36$

Or, $B(0, 1) \in t$, donc $0 - 9y_0 = 36 \Leftrightarrow y_0 = -4$

$I(x_0; -4) \in \mathcal{H}$, donc $4x_0^2 - 9 \cdot 16 = 36 \Leftrightarrow x_0^2 = 45 \Leftrightarrow x_0 = 3\sqrt{5}$ ou $x_0 = -3\sqrt{5}$

Les points de contact sont $I_1(3\sqrt{5}, -4)$ et $I_2(-3\sqrt{5}, -4)$

Les équations des tangentes issues de B sont :

$$t_1 \equiv 4x \cdot 3\sqrt{5} - 9y \cdot (-4) = 36 \Leftrightarrow \sqrt{5}x + 3y = 3 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{5}}{3}x + 1$$

$$t_2 \equiv 4x \cdot (-3\sqrt{5}) - 9y \cdot (-4) = 36 \Leftrightarrow -\sqrt{5}x + 3y = 3 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{3}x + 1 \quad (4 \text{ pts})$$

Autre méthode : La tangente t ne peut pas être l'axe des ordonnées, qui passe par B , car sinon t et \mathcal{H} n'auraient pas de point d'intersection. En effet, si $x=0$ on aurait : $-9y^2=36$ ce qui est impossible.

Par conséquent, $t \equiv y = mx+1$ car $B(0,1) \in t$

$$\text{En remplaçant } y \text{ de } t \text{ dans l'équation de } \mathcal{H}: 4x^2 - 9(mx+1)^2 = 36 \Leftrightarrow (4-9m^2)x^2 - 18mx - 45 = 0$$

Si $m = \pm \frac{2}{3}$ la droite t serait parallèle aux asymptotes et t serait sécante et non tangente à \mathcal{H} .

Sinon, la condition de tangence est $\Delta = 0 \Leftrightarrow 18^2m^2 + 4 \cdot 45 \cdot (4-9m^2) = 0 \Leftrightarrow 9m^2 + 5(4-9m^2) = 0$

$$\Leftrightarrow 36m^2 = 20 \Leftrightarrow m^2 = \frac{5}{9} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ ou } m = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

On retrouve les équations de t_1 et t_2 .

Pour déterminer les points de contact, on utilise $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{18m}{2(4-9m^2)}$, puis on remplace dans t .

Question VI (question au choix) : 5+4= 9 points

1) Notons $M(x_M; y_M)$ un point de la parabole distinct du sommet $S(0;0)$ et $F(\frac{p}{2};0)$ le foyer.

Comme la directrice a pour équation $x = -\frac{p}{2}$ on a $H(-\frac{p}{2}; y_M)$

Les coordonnées du milieu I du segment $[FH]$ sont donc $(0; \frac{y_M}{2})$.

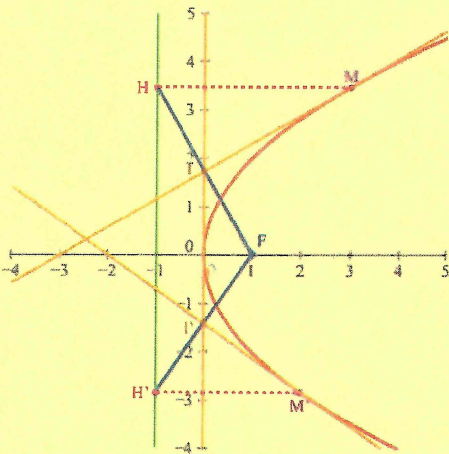
Par ailleurs, la tangente en M a pour équation :

$$yy_M = p(x+x_M) \quad (1)$$

et la tangente au sommet est l'axe des ordonnées.

Leur point d'intersection est obtenu pour $x=0$ qu'on remplace dans (1) pour avoir $y = \frac{px_M}{y_M}$.

Or, le point M appartient à la parabole et vérifie $y_M^2 = 2px_M$ donc $y = \frac{px_M}{y_M} = \frac{y_M^2}{2y_M} = \frac{y_M}{2}$. Le point d'intersection $(0; \frac{y_M}{2})$ coïncide bien avec I . (5 pts)



2) Les sommets de E_1 sont $S_1(3;0)$, $S_2(-3;0)$, $S_3(0;2)$ et $S_4(0;-2)$. On en déduit les sommets du rectangle $ABCD$ circonscrit à E_1 : $A(-3 ; 2)$, $B(3 ; 2)$, $C(3, -2)$ et $D(-3 ; -2)$.

L'équation réduite de l'ellipse E_2 circonscrite au rectangle $ABCD$ est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0$, $b>0$)

Comme cette ellipse passe par $I(0,4)$, on a $b=4$ et $E_2 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Comme E_2 est circonscrite à $ABCD$, on a $A(-3 ; 2) \in E_2$, donc $\frac{9}{a^2} + \frac{4}{16} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 12$.

$$\text{Finalement, } E_2 \equiv \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$$

(4 pts)

L'axe focal est (Oy) et $c^2 = b^2 - a^2 = 4$. Par conséquent, l'excentricité vaut $e = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}$.