



DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	CB	Date de l'épreuve :	20.09.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 11:25
		Numéro du candidat :	

Instructions

- L'élève répond à toutes les questions de la partie obligatoire.
- L'élève répond à exactement 1 question de la partie au choix. Il indique obligatoirement son choix en marquant d'une croix la case appropriée ci-dessous.

Seule la réponse correspondant à la question choisie par l'élève sera évaluée. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix renseigné sur la page de garde la partie au choix est cotée à 0 point.

Partie obligatoire (51 points)			
Question	Nb points	Sujet	Obligatoire
I	21	Nombres complexes	X
II	16	Combinatoire, lois de probabilité	X
III	9	Coniques, applications des coniques	X
IV	5	Trajectoires	X
Partie au choix (9 points)			
Choisissez 1 question parmi les 2 suivantes et indiquez votre choix avec un X			
Question	Nb points	Sujet	Choix du candidat
V	9	Coniques, applications des coniques	
VI	9	Coniques, applications des coniques	

Question I (obligatoire) : 8(=2+3+3) + 13(=8+5) = 21 points

- 1) Soit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- Prouver que les racines cubiques de 1 sont 1, j et j^2 . Vérifier que $1+j+j^2=0$.
 - Montrer que $j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j}$, puis calculer rapidement j^{2023} et $\left(\frac{1}{1+j}\right)^9$.
 - Dans le plan de Gauss, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=1$, $b = -2+i\sqrt{3}$ et $c = -2-i\sqrt{3}$. Prouver que ABC est un triangle équilatéral et que $a+bj+cj^2=0$.
- 2) Dans \mathbb{C} on considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 - [2m + i(1+4m)]z^2 + 2m[-2 + i(1+4m)]z + 8m^2$ où m est un paramètre complexe.
- Vérifier que i est une racine de P, puis résoudre l'équation $P(z) = 0$.
 - Dans le plan gaussien on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i , $2m$ et $4im$.
 - Déterminer la valeur du paramètre m afin que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$. Dans ce cas, que peut-on dire des droites (AB) et (AC) ?
 - On considère la rotation r de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Soit m la valeur trouvée en 1. Déterminer les affixes z_M et z_N des points M et N, images respectives de B et C par r et vérifier que ces points sont situés sur les axes du repère.

Question II (obligatoire) : 2+4+7+3 = 16 points

Une urne contient dix jetons : trois jetons marqués « 1 », trois jetons marqués « 2 » et quatre jetons marqués « 3 ».

- En disposant ces 10 jetons l'un à côté de l'autre de toutes les manières possibles, combien de nombres différents à 10 chiffres obtient-on ?
- Un joueur tire simultanément 3 jetons de l'urne et on suppose l'équiprobabilité des tirages. Calculer la probabilité des événements :
 - on obtient deux « 3 » et un « 2 »
 - au moins 2 jetons portent des numéros différents.
- Le joueur tire simultanément 2 jetons. S'ils portent le même numéro x, le joueur gagne le double de ce numéro : $2x$ euros. Si les 2 jetons portent des numéros différents, le joueur perd la somme correspondant au plus grand de ces 2 numéros (exemples : 2 et 2 gagne 4 euros, 1 et 3 perd 3 euros).
On note X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (en notant négativement les pertes).
 - Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
 - Déterminer la loi de probabilité de X. (on donnera les probabilités en fractions irréductibles)
 - Est-ce que ce jeu est favorable au joueur ?
- Le joueur tire un jeton, note le numéro et le remet dans l'urne. En effectuant 20 tirages quelle est la probabilité (valeur approchée exprimée en % à 0,1 près par défaut) que le nombre de « 1 » obtenus soit compris non strictement entre 8 et 12 ?

Question III (obligatoire) : 2+5+2 = 9 points

Soit P le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 2 cm.

- Réduire l'équation cartésienne de la parabole $P \equiv y^2 + 2x + 6y + 4 = 0$ et préciser les coordonnées de son sommet S.
- Identifier la conique $\Gamma \equiv 3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 28 = 0$ et donner dans P ses éléments caractéristiques (centre, foyers, sommets, directrices, excentricité, axe focal, asymptotes éventuelles).
- Esquisser P et Γ ainsi que leurs sommets dans P.

Question IV (obligatoire) : 1+4 = 5 points

On considère la courbe Γ dont on donne une représentation paramétrique

$$\Gamma \equiv \begin{cases} x = -2 \tan t \\ y = \frac{3}{\cos t} \end{cases}, t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

- Comparer les positions des points $M(t_0)$ et $M(-t_0)$ lorsque t_0 est un réel de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
Quel élément de symétrie admet Γ ?
- Identifier et donner une équation cartésienne de la courbe (on ne demande pas de tracer Γ).

Question V (question au choix) : 4+1+4 = 9 points

Dans un repère orthonormé, on considère l'hyperbole $\mathcal{H} \equiv 4x^2 - 9y^2 = 36$ et la droite $d \equiv y = x + b$ ($b \in \mathbb{R}$).

- Discuter suivant les valeurs du paramètre b la position de d et \mathcal{H} .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à \mathcal{H} au point $A \left(\frac{9\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5} \right)$.
- Déterminer les équations réduites des tangentes à \mathcal{H} issues de $B(0; 1)$ et préciser les points de contact.

Question VI (question au choix) : 5+4 = 9 points

- Soit, dans un repère orthonormé, la parabole d'équation $y^2 = 2px$ de foyer F. On note M un point de la parabole distinct du sommet, et H son projeté orthogonal sur la directrice. Démontrer que la tangente à la parabole en M coupe sa tangente au sommet au milieu du segment [FH].
- Dans un repère orthonormé, l'ellipse $E_1 \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ est inscrite dans un rectangle ABCD dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Une autre ellipse E_2 , centrée à l'origine, est circonscrite au rectangle ABCD et passe par $I(0,4)$. Déterminer l'excentricité de E_2 .