LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022
CORRIGÉ – BARÈME

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 2	CB	*Durée de l'épreuve :*	15.09.22
		Date de l'épreuve :	08:15 - 12:25

I. ▷ Partie A

1) $g(x) = 2x\ln x - 3x + 4$ existe $\Leftrightarrow x > 0$. Donc $\operatorname{dom} g = \mathbb{R}_+^* = \operatorname{dom} g' = \operatorname{dom} g''$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)$$
$$= \lim_{x\to 0^+} (2x\ln x - 3x + 4) \quad \text{calcul à part : } \lim_{x\to 0^+} (x\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0^-$$
$$= 2\cdot 0 - 3\cdot 0 + 4 = 4$$

et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x\ln x - 3x + 4) = \lim_{x\to+\infty} \Big[\underbrace{x}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{(2\ln x - 3)}_{\to+\infty} + 4 \Big] = +\infty$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : g'(x) = (2x)'\ln x + 2x(\ln x)' - 3$
$= 2\ln x + 2 - 3 = 2\ln x - 1$

$g'(x) \gtrless 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 1 \gtrless 0 \Leftrightarrow \ln x \gtrless \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \gtrless \sqrt{e}$

$g(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}\cdot\ln\sqrt{e} - 3\sqrt{e} + 4$
$= \sqrt{e} - 3\sqrt{e} + 4 = 4 - 2\sqrt{e} \approx 0{,}70$

tableau de variation ci-contre :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ 4	↘	$4-2\sqrt{e}$ min	↗	$+\infty$

3) Vu les variations et la continuité de g sur $\mathbb{R}_+^*$, $g(x)$ reste supérieur à la valeur de son minimum absolu de valeur $4 - 2\sqrt{e}$. Or, $4 - 2\sqrt{e} \approx 0{,}70 > 0$. Donc $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

▷ Partie B

1) $f(x) = 4x + x^2\ln x - 2x^2$ existe $\Leftrightarrow x > 0$. Donc $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_+^* = \operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f''$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-2x^2 + 4x + x^2\ln x\right) \quad \text{calcul à part : } \lim_{x\to 0^+} (x^2\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0^-$$
$$= -2\cdot 0 + 4\cdot 0 + 0 = 0$$

et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-2x^2 + 4x + x^2\ln x\right) = \lim_{x\to+\infty} \Big[\underbrace{x^2}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\left(-2 + \frac{4}{x} + \ln x\right)}_{\to+\infty} \Big] = +\infty$

2) $f'(x) = \left(-2x^2 + 4x\right)' + \left(x^2\ln x\right)'$
$= -4x + 4 + \left(x^2\right)'\ln x + x^2(\ln x)' = -4x + 4 + 2x\ln x + x = 2x\ln x - 3x + 4 = g(x)$.

Puisque $f'(x) = g(x)$, on a aussi $f''(x) = g'(x)$.

On a $f(\sqrt{e}) = -2e + 4\sqrt{e} + e\ln\sqrt{e} = -2e + 4\sqrt{e} + \frac{e}{2} = 4\sqrt{e} - \frac{3e}{2}$

avec les valeurs approchées $\sqrt{e} \approx 1{,}65$ et $4\sqrt{e} - \frac{3e}{2} \approx 2{,}52$.

En appliquant les résultats de la partie A :

x	0		$+\infty$
$f'(x)=g(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)=g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\mathscr{C}_f$	‖	$\frown$	$4\sqrt{e}-\frac{3e}{2}$ P.I.	$\smile$	

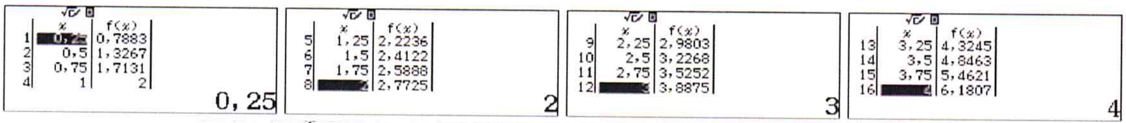
▷ Partie C

1) D'après la partie B : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = h(0)$ et donc h est continue à droite en 0.

   D'après la partie A : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{h(x)}{x} \overset{Ⓗ}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} h'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 4$ existe et est finie.

   Donc h est dérivable à droite en 0 et $\mathscr{C}_h$ admet en $(0;0)$ une demi-tangente de pente 4.

2) Courbe représentative :



	x	f(x)
1	0,25	0,7883
2	0,5	1,3267
3	0,75	1,7131
4	1	2

0, 25

	x	f(x)
5	1,25	2,2236
6	1,5	2,4122
7	1,75	2,5888
8	2	2,7725

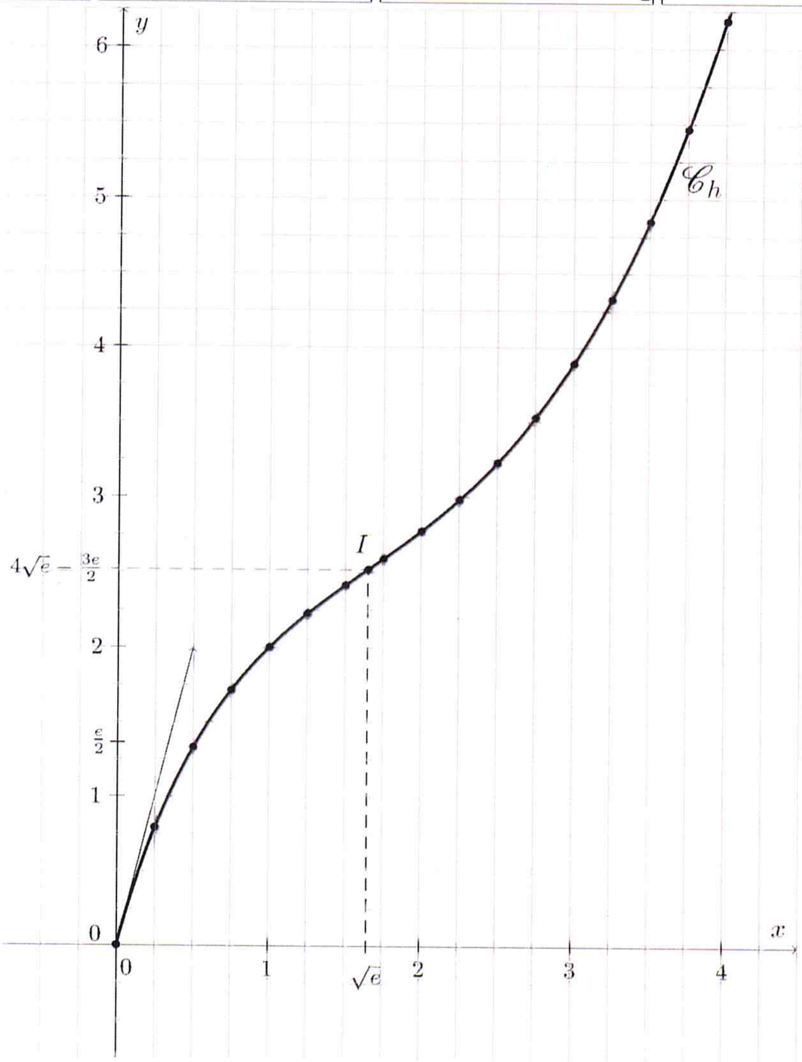
2

	x	f(x)
9	2,25	2,9803
10	2,5	3,2268
11	2,75	3,5252
12	3	3,8875

3

	x	f(x)
13	3,25	4,3245
14	3,5	4,8463
15	3,75	5,4621
16	4	6,1807

4



(5 + 5 + 4 = 14 points)

II. 1) $\log_{20}\left(\log_{\frac{1}{3}}(x)\right) \overset{(I)}{\leqslant} 1 - \log_{20}\left[\log_{\frac{1}{3}}(x^2) - 3\right]$

(I) existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x^2) - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x^2) > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -\sqrt{\frac{1}{27}} < x < \sqrt{\frac{1}{27}} \end{cases}$

avec $\sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}19$. Donc $\operatorname{dom}(I) = \left]0;1\right[\cap \left]-\frac{\sqrt{3}}{9};\frac{\sqrt{3}}{9}\right[= \left]0;\frac{\sqrt{3}}{9}\right[$.

$\forall x \in \operatorname{dom}(I) : (I) \Leftrightarrow \log_{20}\left(\log_{\frac{1}{3}}(x)\right) + \log_{20}\left[\log_{\frac{1}{3}}(x^2) - 3\right] \leqslant 1$

$\Leftrightarrow \log_{20}\left[\left(\log_{\frac{1}{3}}(x)\right)\left(\log_{\frac{1}{3}}(x^2) - 3\right)\right] \leqslant \log_{20} 20 \quad |\exp_{20}$ bij. str. ↗

$\Leftrightarrow \left(\log_{\frac{1}{3}}(x)\right)\left(2\log_{\frac{1}{3}}(x) - 3\right) \leqslant 20$

$\Leftrightarrow 2\log^2_{\frac{1}{3}}(x) - 3\log_{\frac{1}{3}}(x) - 20 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow t = \log_{\frac{1}{3}}(x)$ et $2t^2 - 3t - 20 \leqslant 0$

$\Delta = 9 + 160 = 169$
2 racines $t_1 = \frac{3-13}{2\cdot 2} = -\frac{5}{2}$
et $t_2 = \frac{3+13}{2\cdot 2} = 4$

$\Leftrightarrow t = \log_{\frac{1}{3}}(x)$ et $-\frac{5}{2} \leqslant t \leqslant 4$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leqslant \log_{\frac{1}{3}}(x) \leqslant 4 \quad |\exp_{\frac{1}{3}}$ bij. str. ↘

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} \geqslant x \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{81} \leqslant x \leqslant 9\sqrt{3}$ avec $\frac{1}{81} \approx 0{,}012 < \frac{\sqrt{3}}{9}$ et $9\sqrt{3} \approx 15$

Conclusion : $S = \left[\frac{1}{81}; 9\sqrt{3}\right] \cap \left]0;\frac{\sqrt{3}}{9}\right[= \left[\frac{1}{81};\frac{\sqrt{3}}{9}\right[$

2) $x^{|x-2|} \overset{(E)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{x}}$ (E) existe $\Leftrightarrow x > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^* = \operatorname{dom}(E)$:

$(E) \Leftrightarrow e^{|x-2|\cdot \ln x} = e^{-\frac{1}{x}\cdot \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} \quad |\ln$ bij. str. ↗

$\Leftrightarrow |x-2| \ln x = -\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$\Leftrightarrow |x-2| \ln x = \frac{1}{2x}\ln x$

$\Leftrightarrow \left(|x-2| - \frac{1}{2x}\right)\ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $|x-2| - \frac{1}{2x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $\dfrac{2x|x-2| - 1}{2x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $2x|x-2| - 1 = 0$

Deux cas à discuter :

(1) Si $x \geqslant 2$, alors $2x|x-2| - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 1 = 0$
discr. $\Delta = 16 + 8 = 24 > 0$; $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6}$
2 racines $x_1 = \frac{4-2\sqrt{6}}{2\cdot 2} = \frac{2-\sqrt{6}}{2} \approx -0{,}22 \notin \operatorname{dom}(E)$
et $x_2 = \frac{2+\sqrt{6}}{2} \approx 2{,}22 \overset{!}{\geqslant} 2$

(2) Si $0 < x < 2$, alors $2x|x-2| - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x(-x+2) - 1 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 1 = 0$
discr. $\Delta = 16 - 8 = 8 > 0$; $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$
2 racines $x_3 = \frac{-4-2\sqrt{2}}{2\cdot(-2)} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}7 \in \left]0;2\right[$
et $x_4 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}29 \in \left]0;2\right[$

Conclusion : $S = \left\{\frac{2-\sqrt{2}}{2}; 1; \frac{2+\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right\}$

(8 + 5 = 13 points)

III. 1) $f_m(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^2+mx+m}$ existe $\Leftrightarrow x^2+mx+m\neq 0$.

Discr. $\Delta=m^2-4m=m(m-4)$ avec

m	$-\infty$		0		4		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\forall m\in\,]0;4[\,:\Delta<0$ et donc $x^2+mx+m\neq 0$ est toujours vrai. Donc $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}=\operatorname{dom} f'=\operatorname{dom} f''$ et

▷ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\overbrace{\boxed{e^{-x}}}^{\to 0^+}}{\underbrace{\boxed{x^2+mx+m}}_{\to+\infty}}=0$. Donc $\mathscr{C}_f$ admet l'A.H.D.$\equiv y=0$.

▷ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\overbrace{\boxed{e^{-x}}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\boxed{x^2+mx+m}}_{\to+\infty}}$ f.i. « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$\displaystyle\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{2x+m}$ f.i. « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$\displaystyle\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{2}=+\infty$ pas d'A.H.G.

Cauchy : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f_m(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^3+mx^2+mx}\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{3x^2+2mx}$

$\displaystyle\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{6x+2m}\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{6}=-\infty\neq a$ réel fini non nul.

Donc $\mathscr{C}_{f_m}$ n'admet pas d'A.O.G., mais une branche parabolique de direction asymptotique parallèle à (Oy).

2) Soit $m\in\,]0;2]$.

a) $\forall x\in\mathbb{R}: f_m'(x)$

$$=\dfrac{(x^2+mx+m)\left(e^{-x}\right)'-(x^2+mx+m)'\,e^{-x}}{(x^2+mx+m)^2}$$

$$=\dfrac{-e^{-x}(x^2+mx+m)-(2x+m)\,e^{-x}}{(x^2+mx+m)^2}$$

$$=\dfrac{-e^{-x}(x^2+mx+m+2x+m)}{(x^2+mx+m)^2}=\dfrac{-e^{-x}\left[x^2+(m+2)x+2m\right]}{(x^2+mx+m)^2}$$

$$=\underbrace{\boxed{\dfrac{-e^{-x}}{(x^2+mx+m)^2}}}_{<0}\cdot\left[x^2+(m+2)x+2m\right]$$

Donc $f_m'(x)$ est du signe contraire de $x^2+(m+2)x+2m=P_m(x)$

Discriminant $\Delta=(m+2)^2-8m=m^2-4m+4=(m-2)^2\begin{cases}=0 \text{ si } m=2\\ >0 \text{ si } m\in\,]0;2[\end{cases}$

Discussion des deux cas :

i. Si $\boxed{m=2}$, alors $\Delta=0$ et $P_m=P_2$ a une racine double $x_0=-\frac{m+2}{2}=-\frac{2+2}{2}=-2$ et garde un signe constant positif.

$f_2(-2)=\frac{e^{-(-2)}}{(-2)^2+2(-2)+2}=\frac{e^2}{2}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$P_2(x)$		$+$	0	$+$	
$f_2'(x)$		$-$	0	$-$	
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{e^2}{2}$	$\searrow$	0

Remarque **(non demandé)** : comme f_2' s'annule mais ne change pas de signe en -2, le point $\left(-2;\frac{e^2}{2}\right)$ est un point d'inflexion à tangente horizontale pour $\mathscr{C}_{f_2}$.

ii. Si $\boxed{m \in]0;2[}$, alors $\Delta \neq 0$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(m-2)^2} = |m-2| = -m+2$

Alors P_m a deux racines distinctes $x_1 = \frac{-(m+2)-(-m+2)}{2} = -2$

et $x_2 = \frac{-(m+2)+(-m+2)}{2} = -m$

x	$-\infty$		-2		$-m$		$+\infty$
$P_m(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{e^2}{4-m}$	$\nearrow$	$\frac{e^m}{m}$	$\searrow$	0

b) Tangente t_0 à $\mathscr{C}_{f_m}$ au point $P(0; f_m(0))$:

$$\begin{aligned} t_0 \equiv y &= f'_m(0)(x-0) + f_m(0) \\ &= \frac{-e^{-0}\left[0^2+(m+2)0+2m\right]}{\left(0^2+m\cdot 0+m\right)^2}\cdot x + \frac{e^{-0}}{0^2+m\cdot 0+m} \\ &= \frac{-1\cdot 2m}{m^2}x + \frac{1}{m} = \frac{-2x+1}{m} \end{aligned}$$

Donc $(1;-2) \in t_0 \Leftrightarrow -2 = \frac{-2\cdot 1+1}{m} \Leftrightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$

Alors $t_0 \equiv y = \frac{-2x+1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow t_0 \equiv \boxed{y = -4x+2}$

(4 + 6 + 2 = 12 points)

IV. 1) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}} e^{-4x}\cos 2x\,dx$

ipp. $u(x) = \cos 2x$ $\quad v'(x) = e^{-4x}$

$u'(x) = -2\sin 2x$ $\quad v(x) = -\frac{1}{4}e^{-4x}$

$$= \left[\cos 2x \cdot \left(-\tfrac{1}{4}e^{-4x}\right)\right]_0^{\frac{3\pi}{4}} - \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{4}} e^{-4x}\sin 2x\,dx$$

ipp. $u(x) = \sin 2x$ $\quad v'(x) = e^{-4x}$

$u'(x) = 2\cos 2x$ $\quad v(x) = -\frac{1}{4}e^{-4x}$

$$= 0 - \left(-\tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\left[\sin 2x\cdot\left(-\tfrac{1}{4}e^{-4x}\right)\right]_0^{\frac{3\pi}{4}} + \tfrac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{3\pi}{4}} e^{-4x}\cos 2x\,dx}_{I\text{ retrouvé !}}\right)$$

Donc $I = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left[(-1)\left(-\frac{1}{4}e^{-3\pi}\right) - 0\right] - \frac{1}{4}I$

Donc $\frac{5}{4}I = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}e^{-3\pi}$

Donc $I = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}e^{-3\pi}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{10}e^{-3\pi}$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 2x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{3}}\right]^2+1\right)}dx$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx \qquad t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{t\sqrt{3}+1}{2} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

x	0	1
t	$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$= \frac{4}{3}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{t^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\operatorname{Arc\,tan} t\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\tan 2x)^2\ dx$

$\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1+2\tan 2x+\tan^2 2x\right) dx$

$\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\tan 2x dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\left(1+\tan^2 2x\right) dx$

$\displaystyle = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}\, dx + \left[\frac{1}{2}\tan 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$\displaystyle = \left[-\ln|\cos 2x|\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{2}\left(\tan\frac{\pi}{3}-0\right) = -\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)+\ln(\cos 0)+\frac{\sqrt{3}}{2} = \ln 2+\frac{\sqrt{3}}{2}$

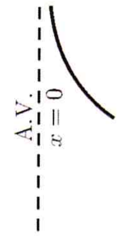
(4 + 4 + 4 = 12 points)

V. Soit $f : x \longmapsto f(x) = \dfrac{3x-x^2-6\log_2 x}{x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) $f(x) = \dfrac{3x-x^2-6\log_2 x}{x} = -x+3-6\frac{\log_2 x}{x}$ existe $\Leftrightarrow x>0$; $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_+^*$.

▷ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{-x+3}_{\to 3 \text{ fini}} - 6\cdot \underbrace{\boxed{\frac{\log_2 x}{x}}}_{\to -\infty}\right)$ calcul à part : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\boxed{\log_2 x}}^{\to -\infty}}{\underbrace{\boxed{x}}_{\to 0^+}} = -\infty$

$= -(-\infty) = +\infty$



Donc $\mathscr{C}_f$ admet l'asymptote verticale $(Oy) \equiv x=0$ à droite de 0. Allure :

▷ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\underbrace{-x}_{\to -\infty} +3 - 6\cdot \underbrace{\boxed{\frac{\log_2 x}{x}}}_{\to 0}\right)$ calcul à part : $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\overbrace{\boxed{\log_2 x}}^{\to +\infty}}{\underbrace{\boxed{x}}_{\to +\infty}} \overset{\text{Ⓗ}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x\cdot\ln 2}}{1} = 0$

$= -\infty$; pas d'A.H.D.

Or, $\forall \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = -x+3-6\dfrac{\log_2 x}{x} = ax+b+\varepsilon(x)$

avec $\begin{cases} a=-1 \text{ et } b=3 \\ \text{et } \varepsilon(x) = -6\frac{\log_2 x}{x} \text{ telle que } \lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = -6\cdot 0 = 0 \text{ d'après le calcul à part précédent.}\end{cases}$

Donc $\mathscr{C}_f$ admet l'A.O.D. $d \equiv y = -x+3$.

2) Etude du signe de $\varepsilon(x) = f(x)-(ax+b) = -6\dfrac{\log_2 x}{x}$:

$-6\dfrac{\log_2 x}{x} \leqslant 0 \qquad \left|\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) < 0\right.$

$\Leftrightarrow \dfrac{\log_2 x}{x} \geqslant 0 \qquad |\cdot x > 0$ sur $\operatorname{dom} f$

$\Leftrightarrow \log_2 x \geqslant 0 \qquad |\exp_2$ bij. str. ↗

$\Leftrightarrow x \geqslant 1$

Position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à d :

x	0		1		$+\infty$
$\varepsilon(x)$	‖	$+$	0	$-$	
pos. rel.	‖	$\dfrac{\mathscr{C}_f}{\text{A.O.D.}}$	$\cap$	$\dfrac{\text{A.O.D.}}{\mathscr{C}_f}$	

3) L'aire $\mathcal{A}$ délimitée par $\mathscr{C}_f$, son asymptote oblique d et la droite d'équation $x=8$, puisque $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de d sur l'intervalle $[1;8]$, est donnée par l'intégrale définie

$\displaystyle\mathcal{A} = \int_1^8 (-x+3-f(x))\, dx$

$\displaystyle = \int_1^8 (-\varepsilon(x))\, dx = \int_1^8 6\frac{\log_2 x}{x}\, dx$

$\displaystyle = 6\ln 2\cdot\int_1^8 \frac{\log_2 x}{x\cdot\ln 2}\, dx = 6\ln 2\cdot\int_1^8 (\log_2 x)^1\cdot(\log_2 x)'\, dx$

$\displaystyle = \frac{6\ln 2}{2}\left[\log_2^2 x\right]_1^8 = 3\ln 2\left(\log_2^2(8)-0^2\right) = 3\ln 2\cdot\left(\log_2\left(2^3\right)\right)^2 = 3\ln 2\cdot 3^2 = 27\ln 2$ unités d'aire.

(4 + 2 + 3 = 9 points)

VI. Soit $f : x \longmapsto f(x) = -x\left(1 + 3 \cdot 2^x\right) - 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) $f(x) = -x\left(1 + 3 \cdot 2^x\right) - 1 = -x - 1 - 3x2^x$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$; $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

$\triangleright$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{-x}_{\to -\infty} - 1 \underbrace{\boxed{-3x2^x}}_{\to -\infty} \right) = -\infty$; pas d'A.H.D.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \underbrace{\boxed{-3 \cdot 2^x}}_{\to -\infty} \right) = -\infty$; pas d'A.O.D., mais une B.P.D. de D.A.$\parallel (Oy)$

$\triangleright$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{-x}_{\to +\infty} - 1 - 3 \cdot \underbrace{\boxed{x2^x}}_{\to 0} \right)$ c. à p. : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\boxed{x}^{\to -\infty}}{\boxed{2^{-x}}_{\to +\infty}} \overset{Ⓗ}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\underbrace{\boxed{-(\ln 2) \cdot 2^{-x}}}_{\to -\infty}} = 0$

$= +\infty$; pas d'A.H.G.

Or, $\forall \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = -x - 1 - 3x2^x = ax + b + \varepsilon(x)$

avec $\begin{cases} a = -1 \text{ et } b = -1 \\ \text{et } \varepsilon(x) = -3x2^x \text{ telle que } \lim\limits_{x \to -\infty} \varepsilon(x) = -3 \cdot 0 = 0 \text{ d'après le calcul à part précédent.} \end{cases}$

Donc $\mathscr{C}_f$ admet l'A.O.G. $d \equiv y = -x - 1$.

2) Etude du signe de $\varepsilon(x) = f(x) - (ax + b) = -3x2^x$

$-3x2^x \lesseqgtr 0 \quad \left| \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 2^{-x}\right) < 0\right.$

$\Leftrightarrow x \gtreqless 0$

Position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à d :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varepsilon(x)$		$+$	0	$-$	
pos. rel.		$\frac{\mathscr{C}_f}{\text{A.O.D.}}$	$\cap$	$\frac{\text{A.O.D.}}{\mathscr{C}_f}$	

3) L'aire $\mathcal{A}$ délimitée par $\mathscr{C}_f$, son asymptote oblique d et la droite d'équation $x = -1$, puisque $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de d sur l'intervalle $\left[-1; 0\right]$, est donnée par l'intégrale définie

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} \left(f(x) - (-x - 1)\right) dx = \int_{-1}^{0} \varepsilon(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(-3x2^x\right) dx$$

$$= -3 \int_{-1}^{0} x2^x\, dx \qquad \text{c. à p. : } \int x2^x\, dx$$

ipp. $\quad u(x) = x \quad v'(x) = 2^x$

$\quad u'(x) = 1 \quad v(x) = \frac{1}{\ln 2} 2^x$

$$= \frac{1}{\ln 2} x 2^x - \frac{1}{\ln 2} \int 2^x\, dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2} x 2^x - \frac{1}{\ln^2 2} 2^x + k \qquad (k \in \mathbb{R})$$

$$= \frac{2^x}{\ln^2 2} \left((\ln 2)x - 1\right) + k \quad = F(x)$$

$$= -3\left(F(0) - F(-1)\right)$$

$$= -\frac{3}{\ln^2 2} \left[2^0 \left((\ln 2) \cdot 0 - 1\right) - 2^{-1} \left((\ln 2) \cdot (-1) - 1\right)\right]$$

$$= -\frac{3}{\ln^2 2} \cdot \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3(1 - \ln 2)}{2 \ln^2 2} \text{ unités d'aire.}$$

(3 + 2 + 4 = 9 points)