LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 2	CB	*Date de l'épreuve :*	15.09.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 12:25
		Numéro du candidat :	

Instructions

- L'élève répond à toutes les questions de la partie obligatoire.
- L'élève répond à exactement 1 question de la partie au choix. Il indique obligatoirement son choix en marquant d'une croix la case appropriée ci-dessous.

Seule la réponse correspondant à la question choisie par l'élève sera évaluée. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix renseigné sur la page de garde, la partie au choix est cotée à 0 point.

Partie obligatoire (51 points)			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Obligatoire**
I.	**14**	**Étude de fonctions**	**X**
II.	**13**	**(In-)équations**	**X**
III.	**12**	**Étude de fonction avec paramètre**	**X**
IV.	**12**	**Calcul intégral**	**X**
Partie au choix (9 points)			
Choisir 1 question parmi les 2 suivantes et indiquer votre choix avec un X			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Choix du candidat**
V.	**9**	**Asymptotes et aire**	
VI.	**9**	**Asymptote et aire**	

Questions obligatoires

I. Partie A

Soit $g : x \longmapsto g(x) = 2x\ln x - 3x + 4$

1) Donner $\mathrm{dom}g$ et $\mathrm{dom}g'$, calculer les limites de $g(x)$ aux bornes de $\mathrm{dom}g$.
2) Etudier les variations de g et dresser son tableau des variations.
3) En déduire le signe de $g(x)$ sur son domaine de définition.

Partie B

Soit $f : x \longmapsto f(x) = 4x + x^2\ln x - 2x^2$ et C_f sa courbe représentative.

1) Donner $\mathrm{dom}f$ et $\mathrm{dom}f'$, calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de $\mathrm{dom}f$.
2) Calculer $f'(x)$ et déduire des résultats de la partie A le tableau des variations de f et le tableau de concavité de C_f.

Partie C

Soit $h : x \longmapsto h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ et C_h sa courbe représentative.

1) Déduire des résultats précédents que h est continue et dérivable à droite en 0 et en donner la conséquence en termes de demi-tangente.
2) Tracer C_h dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

(5+5+4=14 points)

II. Résoudre les (in-)équations suivantes dans l'ensemble des réels.

1) $\log_{20}\left(\log_{\frac{1}{3}}(x)\right) \leq 1 - \log_{20}\left[\log_{\frac{1}{3}}(x^2) - 3\right]$
2) $x^{|x-2|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{x}}$

(8+5=13 points)

III. Soit la famille de fonctions

$$f_m : x \longmapsto f_m(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + mx + m}$$

où $m \in \left]0;4\right[$ est un paramètre réel.

1) Déterminer les domaines d'existence et de dérivabilité de f_m, ainsi que le comportement asymptotique de sa courbe représentative C_{f_m} dans un repère cartésien.
2) On suppose maintenant que $m \in \left]0;2\right]$.
   a) Etudier les variations de f_m et dresser le tableau des variations selon les valeurs de m.
   b) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m la tangente t_0 à C_{f_m} au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1; -2)$. Donner alors une équation de t_0.

(4+(6+2)=12 points)

IV. Calculer les intégrales définies suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}} e^{-4x}\cos(2x)\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\tan 2x)^2 dx$

(4+4+4=12 points)

Questions au choix

V. Soit la fonction f définie par

$$f:x\longmapsto f(x)=\frac{3x-x^2-6\log_2 x}{x}$$

et C_f sa courbe représentative.

1) Démontrer que C_f admet une asymptote verticale et une asymptote oblique, dont une équation est à donner.
2) Etudier la position relative de C_f par rapport à son asymptote oblique selon les valeurs de x dans dom$f$.
3) Déterminer l'aire de la surface fermée délimitée par C_f, son asymptote oblique et la droite d'équation $x=8$.

(4+2+3=9 points)

VI. Soit la fonction f définie par

$$f:x\longmapsto f(x)=-x(1+3\cdot 2^x)-1$$

et C_f sa courbe représentative.

1) Démontrer que C_f admet une asymptote oblique, dont une équation est à donner.
2) Etudier la position relative de C_f par rapport à son asymptote oblique selon les valeurs de x dans dom$f$.
3) Déterminer l'aire de la surface fermée délimitée par C_f, son asymptote oblique et la droite d'équation $x=-1$.

(3+2+4=9 points)

Formulules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\cos(-x) = \cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\tan(\pi + x) = \tan x$ $\tan(-x) = -\tan x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ $\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$