

Date :	19.05.23	Durée :	08:15 - 11:15
Discipline :	Mathématiques	Section(s) :	CB / CB-4LANG

Question 1 (6+8+3 = 17pts)

A. $p(1 - i) = 2 - 5i$

$$\Leftrightarrow 4(1 - i)^2 + 2m(1 - i) - m - 9 = 2 - 5i$$

$$\Leftrightarrow -8i + 2m - 2im - m = 11 - 5i$$

$$\Leftrightarrow m(1 - 2i) = 11 + 3i$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{11+3i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{11+22i+3i-6}{1+4}$$

$$\Leftrightarrow m = 1 + 5i$$

[2]

Ainsi $p(z) = 4z^2 + 2(1 + 5i)z - 10 - 5i$ et on a :

$$p(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4z^2 + 2(1 + 5i)z - 10 - 5i = 0$$

$$\Delta = 4(1 + 5i)^2 - 16(-10 - 5i)$$

$$= 4(1 + 10i - 25) + 160 + 80i$$

$$= 64 + 120i$$

[1]

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R}, \text{ on a : } (a + bi)^2 = 64 + 120i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 64 & (1) \\ 2ab = 120 & (2) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{64^2 + 120^2} = 136 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (3): 2a^2 = 200 \Leftrightarrow a = \pm 10$$

$$(3) - (1): 2b^2 = 72 \Leftrightarrow b = \pm 6$$

Par (2), les racines carrées complexes de Δ sont $10 + 6i$ et $-10 - 6i$.

[2]

$$\text{Finalement les racines de } p \text{ sont : } z_1 = \frac{-2(1+5i)+10+6i}{8} = 1 - \frac{1}{2}i \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{-2(1+5i)-10-6i}{8} = -\frac{3}{2} - 2i$$

[1]

B. Posons $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$Z = \frac{2i(x+iy)+6}{x+iy+2-i}$$

$$= \frac{(6-2y)+2ix}{(x+2)+i(y-1)} \cdot \frac{(x+2)-i(y-1)}{(x+2)-i(y-1)}$$

$$= \frac{6x+12-2xy-4y-i(6y-6-2y^2+2y)+i(2x^2+4x)+2xy-2x}{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{(4x-4y+12)+2i(x^2+y^2+2x-4y+3)}{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

[2]

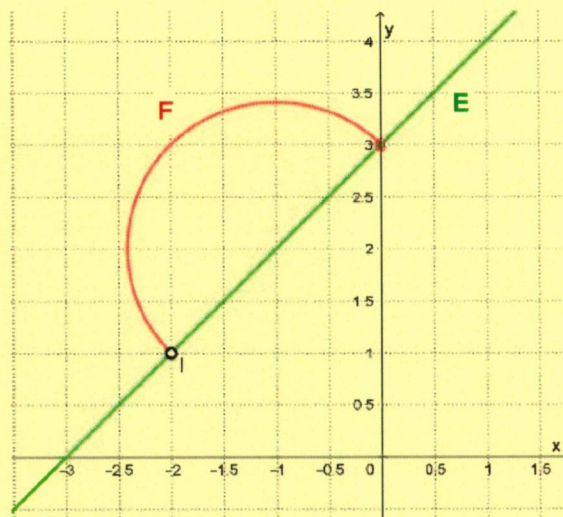
- $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow 4x - 4y + 12 = 0$ et $(x; y) \neq (-2; 1)$
 $\Leftrightarrow \underbrace{y = x + 3}_{\equiv d}$ et $(x; y) \neq (-2; 1)$

Comme $(-2; 1) \in d$, E est la droite $d \equiv y = x + 3$ privée du point $I(-2 + i)$. [2]

- $\arg(z) = \pi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0 \\ 4x - 4y + 12 < 0 \end{cases}$ et $(x; y) \neq (-2; 1)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2 \\ y > x + 3 \end{cases}$ et $(x; y) \neq (-2; 1)$

[3]

F est la partie du cercle $C_{(-1+2i), \sqrt{2}}$ contenue dans le demi-plan d'inéquation $y > x + 3$.



[1]

C. On a :
$$\begin{aligned} \frac{z_B}{z_A} &= \frac{48+64i}{-48+36i} = \frac{12+16i}{-12+9i} \cdot \frac{-12-9i}{-12-9i} \\ &= \frac{-144-108i-192i+144}{144+81} \\ &= \frac{-300i}{225} \\ &= -\frac{4}{3}i \\ &= \frac{4}{3} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{4}{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $z_B = \frac{4}{3} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) z_A$ et B est l'image de A par $h_{O; \frac{4}{3}} \circ r_{O; -\frac{\pi}{2}}$.

D'autre part, $z_B = -\frac{4}{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) z_A$ et B est l'image de A par $h_{O; -\frac{4}{3}} \circ r_{O; \frac{\pi}{2}}$. [3]

Question 2 ((5+2)+4)+(1+2+3) = 17pts)

$$\begin{aligned}
 \text{A. 1) a) } p(X = 9) &= \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \\
 p(X = 3) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 2 = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \\
 p(X = -7) &= 1 - \left(\frac{7}{18} + \frac{5}{18}\right) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

x_i	-7	3	9
$f(x_i) = p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$

[3]

- $E(X) = 9 \cdot \frac{7}{18} + 3 \cdot \frac{5}{18} - 7 \cdot \frac{1}{3} = 2 \text{ €}$

 Comme $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur.

[1]

- $\sigma(X) = \sqrt{\frac{7}{18} \cdot (9-2)^2 + \frac{5}{18} \cdot (3-2)^2 + \frac{1}{3} \cdot (-7-2)^2} = \frac{\sqrt{417}}{3} \approx 6,8 \text{ €}$

[1]

 b) Soit a la nouvelle perte. On a :

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{7}{18} + 3 \cdot \frac{5}{18} - a \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{3} - \frac{a}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 13$$

Il faut remplacer les 7€ par une perte de 13€ pour rendre ce jeu équilibré.

[2]

 2) Y suit une loi binomiale, car :

- Une partie est une épreuve de Bernoulli : $\left\{ \begin{array}{l} \text{succès : gagner 9€, } p = \frac{7}{18} \\ \text{échec : ne pas gagner 9€, } q = 1 - p = \frac{11}{18} \end{array} \right.$
- Comme les n parties sont indépendantes, on a un schéma de Bernoulli.
- Y compte le nombre de succès.

$$\text{Ainsi : } p(Y = i) = C_n^i \left(\frac{7}{18}\right)^i \left(\frac{11}{18}\right)^{n-i}, \forall i \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$$

[2]

$$p(Y > 0) > 90\% \Leftrightarrow 1 - p(Y = 0) > 0,9$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{11}{18}\right)^n > 0,9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{11}{18}\right)^n < 0,1 \quad | \log_{\frac{11}{18}}(\cdot) \text{ bijection strictement décroissante}$$

$$\Leftrightarrow n > \log_{\frac{11}{18}}(0,1) \approx 4,7$$

Donc il doit jouer au moins 5 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois 9€ soit supérieure à 90%.

B. Comme on forme des nombres, l'ordre des chiffres est important et ils peuvent se répéter.

1) $B_3^6 = 3^6 = 729$ possibilités. [1]

- 2) La séquence « 123 » peut être placée à 4 positions différentes et il reste alors 3 chiffres à placer. Comme il ne faut pas compter « 123123 » deux fois, on a :

$$4 \cdot B_3^3 - 1 = 4 \cdot 3^3 - 1 = 108 - 1 = 107 \text{ possibilités.} \quad [2]$$

- 3) On soustrait du nombre total de possibilités les nombres qui ne contiennent qu'au maximum 2 chiffres (à choisir parmi 3), sans compter deux fois les nombres à un seul chiffre :

$$B_3^6 - (C_3^2 \cdot B_2^6 - C_3^1) = 729 - 3 \cdot 64 + 3 = 540 \text{ possibilités.}$$

Alternative :

On soustrait du nombre total de possibilités les nombres qui ne contiennent qu'exactly 2 chiffres (à choisir parmi 3) et ceux qui ne contiennent qu'exactly un chiffre :

$$B_3^6 - C_3^2 \cdot (B_2^6 - 2) - C_3^1 = 729 - 3 \cdot 62 - 3 = 540 \text{ possibilités.} \quad [3]$$

Question 3 (8+6 = 14pts)

A. $\Gamma \equiv 8x^2 - 12y^2 + 80x + 36y + 221 = 0$

$$\Leftrightarrow 8(x^2 + 10x + 25) - 12\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -221 + 8 \cdot 25 - 12 \cdot \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 8(x+5)^2 - 12\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -48 \quad | : (-48)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{4} - \frac{(x+5)^2}{6} = 1 \equiv \Gamma$$

[2]

Ainsi Γ est la translatée de l'hyperbole $\Gamma' \equiv \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{6} = 1$ d'axe (Oy) par le vecteur $\begin{pmatrix} -5 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

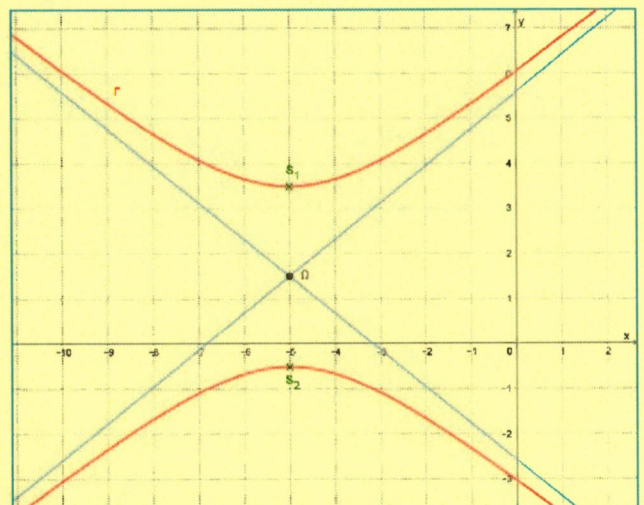
On a : $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$, $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{10}}{2} > 1$.

	$\Gamma' \equiv \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{6} = 1$	$\Gamma \equiv \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{4} - \frac{(x+5)^2}{6} = 1$
Centre	$O(0; 0)$	$\Omega\left(-5; \frac{3}{2}\right)$
Axe focal	$(Oy) \equiv x = 0$	$m \equiv x = -5$
Foyers	$F'_1(0; \sqrt{10}), F'_2(0; -\sqrt{10})$	$F_1\left(-5; \sqrt{10} + \frac{3}{2}\right), F_2\left(-5; -\sqrt{10} + \frac{3}{2}\right)$
Sommets	$S'_1(0; 2), S'_2(0; -2)$	$S_1\left(-5; \frac{7}{2}\right), S_2\left(-5; -\frac{1}{2}\right)$
Asymptotes	$A'_1 \equiv y = \frac{2}{\sqrt{6}}x \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{6}}{3}x$ $A'_2 \equiv y = -\frac{2}{\sqrt{6}}x \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x$	$A_1 \equiv y - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}(x + 5)$ $A_2 \equiv y - \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{3}(x + 5)$

$$\frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{4} - \frac{(x+5)^2}{6} = 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{4 + \frac{2}{3}(x+5)^2}$$

x	-5	-3	0
$y = \frac{3}{2} + \sqrt{4 + \frac{2}{3}(x+5)^2}$	3,5	4,08	6,05



[6]

B. $\Gamma \equiv y = 1 - \sqrt{6 - 2x}$ C.E. : $6 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

$\forall x \in]-\infty; 3] : y = 1 - \sqrt{6 - 2x}$

$\Leftrightarrow y - 1 = \underbrace{-\sqrt{6 - 2x}}_{\leq 0}$

$\Leftrightarrow (y - 1)^2 = 6 - 2x \text{ et } y - 1 \leq 0$

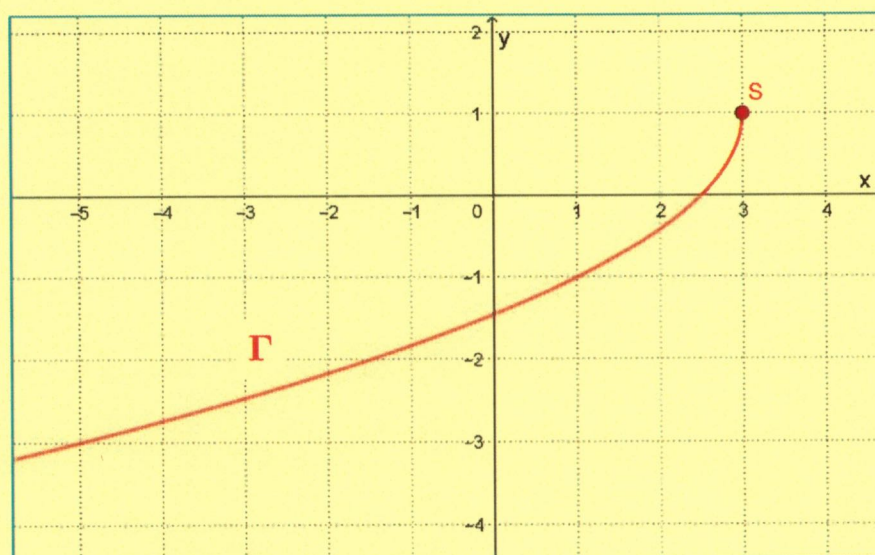
$\Leftrightarrow \underbrace{(y - 1)^2 = -2(x - 3)}_{\equiv \mathbb{P}} \text{ et } y \leq 1$

Donc Γ est la partie de la parabole \mathbb{P} contenue dans le demi-plan d'inéquation $y \leq 1$.

On a : $e = 1$, $p = 1$, $S(3; 1)$ et $F\left(\frac{5}{2}; 1\right)$.

[4]

x	-5	1	3
$y = 1 - \sqrt{6 - 2x}$	-3	-1	1



[2]

Question 4 (12 pts)

Choix du repère : le R.O.N. donné

Choix du paramètre : l'angle orienté $\widehat{AOM} = \alpha$ où $\alpha \in [0; 2\pi]$.

Coordonnées de M : $M(3 \cos \alpha; 3 \sin \alpha)$

Coordonnées de Q : $Q(0; 3 \sin \alpha)$

Coordonnées de N :

$$\text{mil}[QM] = N\left(\frac{3}{2} \cos \alpha; 3 \sin \alpha\right)$$

Coordonnées de P :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_P - 3 \\ y_P \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cos \alpha - 3 \\ 3 \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_P - 3 = \cos \alpha - 2 \\ y_P = 2 \sin \alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \cos \alpha + 1 \\ y_P = 2 \sin \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Donc les coordonnées de P sont : $P(\cos \alpha + 1; 2 \sin \alpha)$.

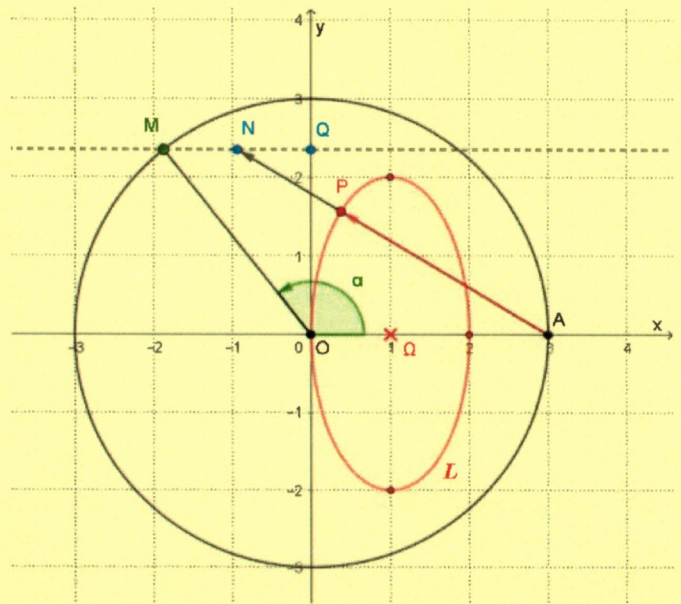
Équations de \mathbb{L} :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x = \cos \alpha + 1 \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{où } \alpha \in [0; 2\pi] \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \cos \alpha = x - 1 & (1) \\ \sin \alpha = \frac{y}{2} & (2) \end{cases} \quad \text{où } \alpha \in [0; 2\pi] \end{aligned}$$

$$(1)^2 + (2)^2: (x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \equiv \mathbb{E}$$

Comme $\alpha \in [0; 2\pi]$, \mathbb{L} est l'ellipse $\mathbb{E} \equiv (x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ de centre $\Omega(1; 0)$, avec $a = 1$ et $b = 2$.

Ses sommets sont les points : $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(1; 2)$ et $(1; -2)$.



Alternative :

Choix du repère : le R.O.N. donné

$$\text{On a : } M(x_M; y_M) \in C \Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 = 9 \Leftrightarrow y_M = \pm\sqrt{9 - x_M^2}$$

Considérons d'abord le cas où M appartient au 1^{er} ou 2^e quadrant.

$$\text{Alors } y_M \geq 0 \text{ et on a } y_M = \sqrt{9 - x_M^2}.$$

Choix du paramètre : l'abscisse x_M de M , où $x_M \in [-3; 3]$.

$$\text{Coordonnées de } M : M(x_M; \sqrt{9 - x_M^2})$$

$$\text{Coordonnées de } Q : Q(0; \sqrt{9 - x_M^2})$$

$$\text{Coordonnées de } N : \text{mil}[QM] = N\left(\frac{x_M}{2}; \sqrt{9 - x_M^2}\right)$$

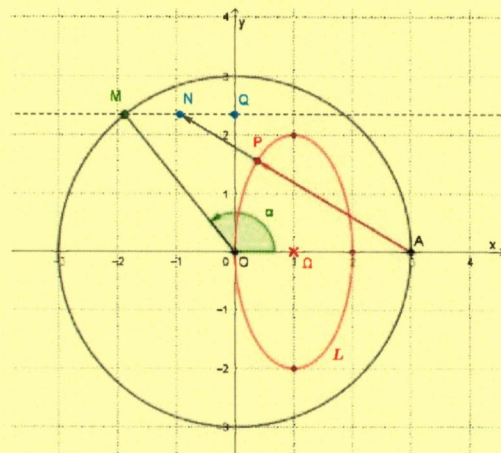
Coordonnées de P :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_P - 3 \\ y_P \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{x_M - 3}{2} \\ \sqrt{9 - x_M^2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_P - 3 = \frac{1}{3}x_M - 2 \\ y_P = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x_M^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \frac{1}{3}x_M + 1 \\ y_P = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x_M^2} \end{cases}$$

Donc les coordonnées de P sont : $P\left(\frac{1}{3}x_M + 1; \frac{2}{3}\sqrt{9 - x_M^2}\right)$.



Équations de \mathbb{L}_1 :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x_M + 1 & (1) \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x_M^2} & (2) \end{cases} \text{ où } x_M \in [-3; 3]$$

$$(1): x_M = 3x - 3$$

$$\text{Dans (2): } y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - (3x - 3)^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{4}{9}[9 - 9(x - 1)^2] \text{ et } y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 4 - 4(x - 1)^2 \text{ et } y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4}}_{\equiv \mathbb{E}} = 1 \text{ et } y \geq 0$$

\mathbb{E} est l'ellipse de centre $\Omega(1; 0)$, avec $a = 1$ et $b = 2$. Ses sommets sont les points $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(1; 2)$ et $(1; -2)$.

Donc \mathbb{L}_1 est la partie de \mathbb{E} contenue dans le demi-plan d'inéquation $y \geq 0$.

Comme le problème est symétrique par rapport à l'axe (Ox) , si M appartient au 3^e ou 4^e quadrant, on obtient comme lieu \mathbb{L}_2 de P , la partie de \mathbb{E} contenue dans le demi-plan d'inéquation $y \leq 0$, car le centre de symétrie de \mathbb{E} se situe sur (Ox) .

Finalement $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \mathbb{E}$.