

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT

Date :	15.05.23	Durée :	08:15 - 12:15	Numéro candidat :	
Discipline :	Mathématiques II - Informatique - Mathématiques 2	Section(s) :	CB / CB-4LANG		

Question 1 (0,5+2+3+3+1+2,5+2=14)

Considérons la fonction réelle f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + \ln(2 - x) & \text{si } x \leq 1 \\ x\sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Étudier la continuité de f en 1.
- Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement.
- Étudier le comportement asymptotique du graphe G_f de f .
- Étudier les variations de f et dresser le tableau des variations.
- Étudier la concavité du graphe G_f de f et dresser le tableau de concavité.
- Représenter le graphe G_f de f dans un repère orthonormé dont l'unité graphique est le cm.

Question 2 (5+2=7)

m est un nombre réel quelconque.

- Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $4^{x-1} + m 2^{x+1} + 4 = 0$.
- Résoudre cette équation pour $m = -2$.

Question 3 (2+2,5+2,5=7)

- Calculer: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\sin 2x}$
- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $2 - \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x} = 2 \log_4 x^2 - 3 \log_8 x$.
- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $2 \ln|x - 1| - \ln(2 - x^2) \geq 0$.

Question 4 (1,5+3,5=5)

Considérons la fonction réelle f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 8}{(1 - x)(x^2 + 2)}$.

- Déterminer des constantes réelles a , b et c telles que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 2} + \frac{c}{1 - x}$.
- Calculer l'intégrale indéfinie $\int f(x) dx$.

Question 5 (2+5+2=9)

Considérons le cercle $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 = 4$ et la droite $D \equiv y = -2x + 4$.

- Représenter ces deux courbes dans un repère orthonormé dont l'unité graphique est le cm. Établir les coordonnées de leurs points d'intersection.
- Calculer l'aire de la surface Δ délimitée par ces deux courbes dans le premier quadrant du plan.
- Calculer le volume du solide S obtenu par la rotation de la surface Δ autour de l'axe des x .

Question 6 (2+4=6)

Calculer les intégrales définies suivantes :

$$1. I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$$

$$2. J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-2x} \sin 2x dx$$

Question 7 (5+5+2=12)

Soit f_m la fonction réelle définie par $f_m(x) = (m - 1) \cdot x + e^{m \cdot x}$ où m est un paramètre réel strictement positif. C_m est la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé.

En discutant suivant les valeurs du paramètre réel strictement positif m :

1. Indiquer le domaine de définition de f_m . Étudier le comportement asymptotique du graphe C_m de f_m .
2. Étudier les variations de f_m . Dresser un tableau des variations pour chaque cas de figure. On ne demande pas de préciser la valeur d'un extremum éventuel.
3. Soit Δ la tangente à C_m au point d'abscisse 0. Établir une équation de Δ . Déterminer la valeur de m pour laquelle la droite Δ passe par le point A(5;2). Pour cette valeur de m , représenter dans un repère orthonormé dont l'unité graphique est le cm : le graphe C_m , Δ et les asymptotes éventuelles de C_m .

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$		
$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$	$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$	
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$		$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$		
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$		$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$		
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	
$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$	$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$		$\cos 3x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x$
$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$		$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$
$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$		
$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$		$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$
$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$		
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$		
$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$		
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$		