EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES			
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT			
Date : 06.06.23		*Durée :* 08:15 - 10:00	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Structures	*Section(s) :*	CC / CC-4LANG

Question 1 **(21p)**

1) $\underbrace{3z^3+(2+6i)z^2-(32-49i)z-45+65i}_{=P(z)}=0$ **(10p)**

L'équation admet une solution réelle. Il existe donc un réel a tel que $P(a)=0$.

Or :
$$\begin{aligned}&P(a)=0\\ \Leftrightarrow\ &3a^3+(2+6i)a^2-(32-49i)a-45+65i=0\\ \Leftrightarrow\ &3a^3+2a^2+6ia^2-32a+49ia-45+65i=0\\ \Leftrightarrow\ &(3a^3+2a^2-32a-45)+(6a^2+49a+65)i=0\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}3a^3+2a^2-32a-45=0 & (1)\\ 6a^2+49a+65=0 & (2)\end{cases}\end{aligned}$$
(1p)

De (2) : $6a^2+49a+65=0 \quad \Leftrightarrow a=-\frac{13}{2}$ ou $a=-\frac{5}{3} \quad (\Delta=841)$.
$a=-\frac{13}{2}$ dans (1) : $-\frac{4611}{8}\neq 0$.
$a=-\frac{5}{3}$ dans (1) : $0\overset{!}{=}0$. *(1p)*

Donc $-\frac{5}{3}$ est la solution réelle cherchée.

Avec le schéma de HORNER :

	3	$2+6i$	$-32+49i$	$-45+65i$
$-\frac{5}{3}$		-5	$5-10i$	$45-65i$
	3	$-3+6i$	$-27+39i$	0

Donc :
$$\begin{aligned}&P(z)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left(z+\frac{5}{3}\right)\left[3z^2+(-3+6i)z-27+39i\right]=0\\ \Leftrightarrow\ &3\left(z+\frac{5}{3}\right)\underbrace{\left[z^2+(-1+2i)z-9+13i\right]}_{=P_1(z)}=0\end{aligned}$$
(2p)

Cherchons les racines de P_1 :
$$\begin{aligned}&P_1(z)=0\\ \Leftrightarrow\ &z^2+(-1+2i)z-9+13i=0\\ &\Delta_{P_1}=(-1+2i)^2-4(-9+13i)\\ &\phantom{\Delta_{P_1}}=33-56i\end{aligned}$$
(1p)

Soit $u = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ une racine carrée complexe de Δ_{P_1}, alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 33 & (3) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{33^2 + 56^2} = 65 & (4) \\ 2xy = -56 & (5) \end{cases}$$

Avec $(3) + (4)$: $2x^2 = 98 \Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = \pm 7$

Avec $(4) - (3)$: $2y^2 = 32 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$

De (5) on sait que x et y sont de signes contraires.

Donc $u_1 = 7 - 4i$ et $u_2 = -7 + 4i$. *(4p)*

Finalement :

$z_1 = \frac{-(-1+2i)+7-4i}{2} = 4 - 3i$

$z_2 = \frac{-(-1+2i)-7+4i}{2} = -3 + i$

$\mathcal{S} = \left\{4 - 3i; -3 + i, -\frac{5}{3}\right\}$ *(1p)*

2) $\forall z \in \mathbb{C}$: $[10 - 5i - (6 - 8i)\,\overline{z}]\,(2z^4 - 18) = 0$ **(4p)**

$\Leftrightarrow [10 - 5i - (6 - 8i)\,\overline{z}]\,2(z^2 - 3)(z^2 + 3) = 0 \qquad |\cdot \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow [10 - 5i - (6 - 8i)\,\overline{z}]\,(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})(z^2 - 3i^2) = 0$

$\Leftrightarrow [10 - 5i - (6 - 8i)\,\overline{z}]\,(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})(z - \sqrt{3}i)(z + \sqrt{3}i) = 0$

$\Leftrightarrow z - \sqrt{3} = 0$ ou $z + \sqrt{3} = 0$ ou $z - \sqrt{3}i = 0$ ou $z + \sqrt{3}i = 0$ ou $\overline{z} = \dfrac{10 - 5i}{6 - 8i}$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{3}$ ou $z = -\sqrt{3}$ ou $z = \sqrt{3}i$ ou $z = -\sqrt{3}i = 0$ ou $\overline{z} = 1 + \frac{1}{2}i$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{3}$ ou $z = -\sqrt{3}$ ou $z = \sqrt{3}i$ ou $z = -\sqrt{3}i = 0$ ou $z = 1 - \frac{1}{2}i$

$\mathcal{S} = \left\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}; \sqrt{3}i; -\sqrt{3}i; 1 - \frac{1}{2}i\right\}$

3) $z_1 = -2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} \cdot i$ et $z_2 = -108 \cdot i \cdot cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ **(7p)**

a) $*$ $z_1 = -2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} \cdot i$ *(4p)*

$|z_1| = \sqrt{\left(-2\sqrt{6}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\arg(z_1)$: $\begin{cases} \cos\varphi_{z_1} = \frac{-2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi_{z_1} = \frac{-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Comme $\cos\varphi_{z_1} < 0$ et $\sin\varphi_{z_1} < 0$, on sait que φ_{z_1} appartient au troisième quadrant.

$\Rightarrow \varphi_{z_1} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Donc $z_1 = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(\frac{7\pi}{6})$ (ou bien $z_1 = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(\frac{-5\pi}{6})$) (2p)

$*$ $z_2 = -108i \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = (-i) \cdot 108\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot 108\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 108\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ (0,5p)

$$Z = \frac{(z_1)^2}{z_2} = \frac{\left(4\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(\frac{7\pi}{6})\right)^2}{108\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{32\,\mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{3}\right)}{108\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{8\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{27\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{8}{27}\,\mathrm{cis}\left(\frac{-5\pi}{12}\right).$$ (1,5p)

b) Soit $u^3 = Z$, alors $u = \sqrt[3]{\frac{8}{27}}\,\mathrm{cis}(\frac{-5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3})$, avec $k \in \{0; 1; 2\}$. *(3p)*

- pour $k = 0$: $u = \frac{2}{3}\,\mathrm{cis}\left(\frac{-5\pi}{36}\right)$
- pour $k = 1$: $u = \frac{2}{3}\,\mathrm{cis}\left(\frac{19\pi}{36}\right)$
- pour $k = 2$: $u = \frac{2}{3}\,\mathrm{cis}\left(\frac{43\pi}{36}\right)$

Question 2 **(12p)**

1) Le système admet une solution unique **(4p)**

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 1 & -m-4 \\ 4m+7 & -2m-4 & -4m-8 \\ 13 & 2m & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 4m(-2m-4)+13(-4m-8)+2m(4m+7)(-m-4) \\
&\quad -13(-2m-4)(-m-4)-4(4m+7)-2m^2(-4m-8)\neq 0 \\
&\Leftrightarrow -8m^2-16m-52m-104-8m^3-32m^2-14m^2-56m \\
&\quad -26m^2-104m-52m-208-16m-28+8m^3+16m^2\neq 0 \\
&\Leftrightarrow -64m^2-296m-340\neq 0 \ \Leftrightarrow 16m^2+74m+85\neq 0 (\Delta=36) \\
&\Leftrightarrow m\neq -\frac{5}{2} \text{ et } m\neq -\frac{17}{8}
\end{aligned}$$

Le système admet une solution unique $\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{2};-\frac{17}{8}\right\}$.

2) pour $m=-\frac{5}{2}$, le système devient : **(4p)**

$$\begin{cases} -\frac{5}{2}x+y-\frac{3}{2}z=-\frac{5}{2} & (1) \\ -3x+y+2z=2 & (2) \\ 13x-5y+4z=8 & (3) \end{cases}$$

En remplaçant (3) par $(3)+(2)+4\cdot(1)$ on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{5}{2}x+y-\frac{3}{2}z=-\frac{5}{2} \\ -3x+y+2z=2 \\ 0=0 \quad \text{toujours vrai} \end{cases}$$ Le système est simplement indéterminé.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2}x+y-\frac{3}{2}z=-\frac{5}{2} & (1) \\ -3x+y+2z=2 & (2) \end{cases}$$

De (1) on obtient : $y=\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}z-\frac{5}{2}$ (4).

(4) dans (2) : $-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}z=\frac{9}{2}\Leftrightarrow x=7z-9$ (5)

(5) dans (4) : $y=19z-25$

$\mathcal{S}=\{(7\gamma-9;19\gamma-25,\gamma)\,|\gamma\in\mathbb{R}\}$

I.G. : Le système représente 3 plans différents qui se coupent selon une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\19\\1\end{pmatrix}$ et qui passe par le point $P(-9;-25;0)$.

(Autres possibilités : $\mathcal{S}=\left\{\left(\alpha;\frac{19}{7}\alpha-\frac{4}{7};\frac{1}{7}\alpha+\frac{9}{7}\right)|\alpha\in\mathbb{R}\right\}$ et $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{7}{19}\beta+\frac{4}{19};\beta;\frac{1}{19}\beta+\frac{25}{19}\right)|\beta\in\mathbb{R}\right\}$)

3) pour $m=-1$, le système devient : **(4p)**

$$\begin{cases} -x+y-3z=-1 & (1) \\ 3x-2y-4z=2 & (2) \\ 13x-2y+4z=8 & (3) \end{cases}$$

De (1) on obtient : $x=y-3z+1$ (4).

(4) dans (2) : $y=13z-1$ (5).

(4) dans (3) : $11y-35z=-5$ (6).

(5) dans (6) : $108z=6\Leftrightarrow z=\frac{1}{18}$.

$z=\frac{1}{18}$ dans (5) : $y=-\frac{5}{18}$.

$z=\frac{1}{18}$ et $y=-\frac{5}{18}$ dans (4) : $x=\frac{5}{9}$.

$\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{5}{9};-\frac{5}{18};\frac{1}{18}\right)\right\}$

I.G. : Le système représente 3 plans qui se coupent en un seul point de coordonnées $Q\left(\frac{5}{9};-\frac{5}{18};\frac{1}{18}\right)$.

Question 3 **(10p)**

1) $d \equiv \begin{cases} 2x - 8y + 2z - 1 = 0 & (1) \\ -x + 2y - 5z + 2 = 0 & (2) \end{cases}$ **(4p)**

Avec (2) : $x = 2y - 5z + 2 \quad (3)$.

(3) dans (1) : $-4y - 8z + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2z + \frac{3}{4} \quad (4)$.

(4) dans (3) : $x = -9z + \frac{7}{2}$.

En posant $z = \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$ on obtient le système d'équations paramétriques suivant :

$$d \equiv \begin{cases} x = -9\gamma + \frac{7}{2} \\ y = -2\gamma + \frac{3}{4} \\ z = \gamma \end{cases} \quad \text{avec } \gamma \in \mathbb{R}.$$

(Autres possibilités :

$$d \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{2}{9}\alpha - \frac{1}{36} \\ z = -\frac{1}{9}\alpha + \frac{7}{18} \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}; \quad \text{et } d \equiv \begin{cases} x = \frac{9}{2}\beta + \frac{1}{8} \\ y = \beta \\ z = -\frac{1}{2}\beta + \frac{3}{8} \end{cases} \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{R}. \;)$$

2) Le plan Π est perpendiculaire à d et $A(-1;4;2) \in \Pi$. **(3p)**

* Comme $\Pi \perp d$: un vecteur directeur de d est un vecteur normal à Π. De la première partie de l'exercice, on sait que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
  $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\Pi \Leftrightarrow \Pi \equiv -9x - 2y + z + d = 0$.
* $A(-1;4;2) \in \Pi \Leftrightarrow 9 - 8 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$.

Finalement une équation cartésienne de Π est :$\Pi \equiv -9x - 2y + z - 3 = 0$.

3) En posant $x = \alpha$ et $y = \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **(3p)**
on obtient le système d'équations paramétriques suivant :

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 9\alpha + 2\beta + 3 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de Π et le point $M(0;0;3) \in \Pi$.

Question 4 **(17p)**

1) $\left(2x^3 - \dfrac{3}{x^2}\right)^8$ **(5p)**

$$= \sum_{i=0}^{8} (-1)^i \cdot C_8^i \cdot (2x^3)^{8-i} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{8} (-1)^i \cdot C_8^i \cdot 2^{8-i} \cdot x^{24-3i} \cdot 3^i \cdot x^{-2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{8} (-1)^i \cdot C_8^i \cdot 2^{8-i} \cdot 3^i \cdot x^{24-5i}$$

Comme on cherche le terme en x^{-11}, il faut que $24 - 5i = -11 \Leftrightarrow i = 7$. Le terme en x^{-11} est donc égal à : $(-1)^7 \cdot C_8^7 \cdot 2^{8-7} \cdot 3^7 \cdot x^{-11} = -34\,992x^{-11}$.

2) Nombre de mains possibles : $C_{52}^7 = 133\,784\,560$. **(6p)**

a) Nombre de mains favorables : $\underbrace{C_4^4}_{\text{4 valets}} \cdot \underbrace{C_{48}^3}_{\text{3 autres cartes}} = 17\,296$. *(1p)*

$P(\text{« tirer les quatres valets »}) = \frac{C_4^4 \cdot C_{48}^7}{C_{52}^7} = \frac{1}{7\,735} \approx 0{,}000\,13$

b) $P(\text{« tirer au moins un carreau »}) = 1 - P(\text{« ne tirer aucun carreau »})$ *(2p)*

$= 1 - \frac{C_{39}^7}{C_{52}^7} = 1 - \frac{15\,380\,937}{133\,784\,560} = \frac{535\,763}{605\,360} \approx 0{,}885$

c) Nombre de mains favorables :

$\underbrace{C_{12}^3}_{\text{3 trèfles, sans le roi}} \cdot \underbrace{C_3^2}_{\text{2 rois, pas de trèfles}} \cdot \underbrace{C_{36}^2}_{\text{2 autres cartes}}$

$+ \underbrace{C_1^1}_{\text{le roi de trèfle}} \cdot \underbrace{C_3^1}_{\text{1 rois, pas de trèfles}} \cdot \underbrace{C_{12}^2}_{\text{2 trèfles, sans le roi}} \cdot \underbrace{C_{36}^3}_{\text{3 autres cartes}}$

$= 1\,829\,520$.

$P(\text{« tirer exactement trois trèfles et deux rois »}) = \frac{1\,829\,520}{133\,784\,560} = \frac{3267}{238901} \approx 0{,}014$ *(3p)*

3) **(6p)**

a) Le mot commence par une consonne :

$\underbrace{C_{21}^1}_{\text{la première lettre est une consonne}} \cdot \underbrace{C_{20}^3}_{\text{3 consonnes parmi celles qui restent}} \cdot \underbrace{C_5^3}_{\text{3 voyelles}} \cdot \underbrace{P_6}_{\text{ordre des 3 consonnes et 3 voyelles}}$

$= 172\,368\,000$ possibilités. *(2p)*

b) Le mot contient la lettre A :

$\underbrace{C_1^1}_{\text{lettre A}} \cdot \underbrace{C_{21}^4}_{\text{4 consonnes}} \cdot \underbrace{C_4^2}_{\text{2 autres voyelles}} \cdot \underbrace{P_6}_{\text{possibilités de distribuer les 4 consonnes et 2 voyelles}} \cdot \underbrace{A_7^1}_{\text{position de la lettre A}}$

$= 180\,986\,400$ possibilités. *(2p)*

c) $\underbrace{C_{21}^4}_{\text{4 consonnes}} \cdot \underbrace{C_5^3}_{\text{3 voyelles}} \cdot \underbrace{P_4}_{\text{ordre des 4 consonnes}} \cdot \underbrace{P_3}_{\text{ordre des 3 voyelles}}$

$= 8\,618\,400$ possibilités. *(2p)*