EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES **Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT**			
Date : 19.05.23		*Durée :*	08:15 - 11:00
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse	*Section(s) :*	CC / CC-4LANG

Question 1 **4 + (2 + 4) + 5 = 15 points**

1) Voir EM page 87.

2) a) $\int \frac{4}{\sqrt{1-9x^2}}dx \quad = \frac{4}{3}\int \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}dx$

$= \frac{4}{3}\text{Arcsin}(3x) + k, k \in \mathbb{R}$

b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1-\tan x)^2 dx \quad = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 - 2\tan x + \tan^2 x)dx$

$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(1 + \tan^2 x - 2\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$

$= \left[\tan x + 2\ln|\cos x|\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$

$= \tan\frac{\pi}{6} + 2\ln\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2\ln\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 2\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$

3) D'après la figure : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right], f(x) > g(x) > 0$

donc $V \quad = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} [f^2(x) - g^2(x)]dx$

$= \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} [(\cos x + 1)^2 - (\sin x + 1)^2]dx$

$= \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} [\cos^2 x + 2\cos x + 1 - (\sin^2 x + 2\sin x + 1)]dx$

$= \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} [\cos^2 x - \sin^2 x + 2\cos x - 2\sin x]dx$

$= \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} [\cos 2x + 2\cos x + 2(-\sin x)]dx$

$= \pi\left[\frac{1}{2}\sin 2x + 2\sin x + 2\cos x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}$

$= \pi\left[\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= \pi\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot(-1) - 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

$= \pi\left[\frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}\right]$ *u.v.*

Question 2 **4 + 6 = 10 points**

1) $(E)\quad e^{2x} = 6e^{-2x} + 1$ $\qquad \mathrm{dom}(E) = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}\quad (E) \iff e^{2x} - 1 - 6e^{-2x} = 0 \qquad | \cdot e^{2x} > 0$

$\iff e^{4x} - e^{2x} - 6 = 0$ $\qquad$ Posons $y = e^{2x}$ avec $y > 0$

$\iff y^2 - y - 6 = 0$ $\qquad$ $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$

$\iff y = \dfrac{1-5}{2} \vee y = \dfrac{1+5}{2}$

$\iff \underbrace{y = -2}_{\text{à écarter car } y>0} \vee y = 3$

$\iff e^{2x} = 3 \qquad |\ln \text{ bij.}$

$\iff 2x = \ln 3$

$\iff x = \dfrac{1}{2}\ln 3$

$\iff x = \ln\sqrt{3}$ $\qquad$ $S = \{\ln\sqrt{3}\}$

2) $(I)\quad \log_2(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(3x-1) \geq 4\log_4(2x-4)$

C.E. : (1) $x - 2 > 0 \iff x > 2$ (2) $3x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{3}$ (3) $2x - 4 > 0 \iff x > 2$

donc $\mathrm{dom}(I) =]2; +\infty[$.

$\forall x \in]2; +\infty[\quad (I) \iff \log_2(x-2) - \dfrac{\log_2(3x-1)}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} \geq 4\dfrac{\log_2(2x-4)}{\log_2(4)}$

$\iff \log_2(x-2) - \dfrac{\log_2(3x-1)}{-1} \geq 4\dfrac{\log_2(2x-4)}{2}$

$\iff \log_2(x-2) + \log_2(3x-1) \geq 2\log_2(2x-4)$

$\iff \log_2[(x-2)(3x-1)] \geq \log_2\left[(2x-4)^2\right] \qquad |\log_2 \text{ bij.} \nearrow$

$\iff (x-2)(3x-1) \geq (2x-4)^2$

$\iff 3x^2 - 7x + 2 - (4x^2 - 16x + 16) \geq 0$

$\iff -x^2 + 9x - 14 \geq 0$

T.D.S. de $-x^2 + 9x - 14$: $\qquad \Delta = 9^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-14) = 25 > 0$

$x_1 = \frac{-9-5}{-2} = 7 \qquad x_2 = \frac{-9+5}{-2} = 2$

x	$-\infty$		2		7		$+\infty$
$-x^2 + 9x - 14$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = [2;7] \cap]2; +\infty[=]2;7]$

Question 3 **(4 + 4 + 4 + 2 + 3) + 5 + 5 = 27 points**

1) $f(x) = 4(x^2 - 3x + 1)e^{1-x}$

a) $\text{dom} f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{4(x^2-3x+1)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{\overbrace{1-x}^{\to-\infty}}}_{\to 0} \quad f.i.\ "\infty\cdot 0"$$

[Calcul à part :

$$\lim_{x\to+\infty} 4(x^2-3x+1) = \lim_{x\to+\infty} 4x^2 = +\infty$$]

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{4(x^2-3x+1)}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^{\overbrace{-1+x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty}} \quad f.i.\ "\frac{\infty}{\infty}"$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{4(2x-3)}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^{-1+x}}_{\to+\infty}} \quad f.i.\ "\frac{\infty}{\infty}"$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\underbrace{e^{-1+x}}_{\to+\infty}}$$

$$= 0$$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale à droite d'équation $y = 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{4(x^2-3x+1)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{\overbrace{1-x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty} = +\infty$$ $\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale à gauche.

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique à gauche par les formules de Cauchy :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{4\left(\overbrace{x-3}^{\to-\infty} + \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}\right)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{\overbrace{1-x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty} = -\infty$$

$\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote oblique à gauche.

b) $\text{dom} f' = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4(2x-3)e^{1-x} + 4(x^2-3x+1)\cdot(-1)\cdot e^{1-x}$$
$$= 4e^{1-x}(-x^2+5x-4)$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ 4e^{1-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 5x - 4$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0$ $\quad\quad \Delta = 5^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-4) = 9 = 3^2 > 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5-3}{2\cdot(-1)} \vee x = \frac{-5+3}{2\cdot(-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 1$$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-4 min	$\nearrow$	$\frac{20}{e^3}$ Max	$\searrow$	$-\infty$

$f(1) = 4(1^2 - 3 \cdot 1 + 1)e^{1-1} = -4$ $\qquad$ $f(4) = 4(4^2 - 3 \cdot 4 + 1)e^{1-4} = \frac{20}{e^3} \approx 1$

f admet un minimum en 1 qui vaut -4 et un maximum en 4 qui vaut $\frac{20}{e^3}$.

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisse 1 et 4.

c) $\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4 \cdot (-1) \cdot e^{1-x}(-x^2 + 5x - 4) + 4e^{1-x}(-2x + 5) \\ &= 4e^{1-x}(x^2 - 7x + 9) \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ 4e^{1-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x^2 - 7x + 9$.

$f''(x) = 0 \iff x^2 - 7x + 9 = 0$ $\qquad$ $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 13 > 0$

$$\iff x = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \lor x = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\approx 1{,}70 \qquad \approx 5{,}30$$

Tableau de concavité de f :

x	$-\infty$		$\frac{7-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{7+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\mathcal{C}_f$		$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$	

$f\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right) \approx -2{,}41$ $\qquad$ $f\left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right) \approx 0{,}72$

$\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion : $I_1(1{,}70; -2{,}41)$ et $I_2(5{,}30; 0{,}72)$.

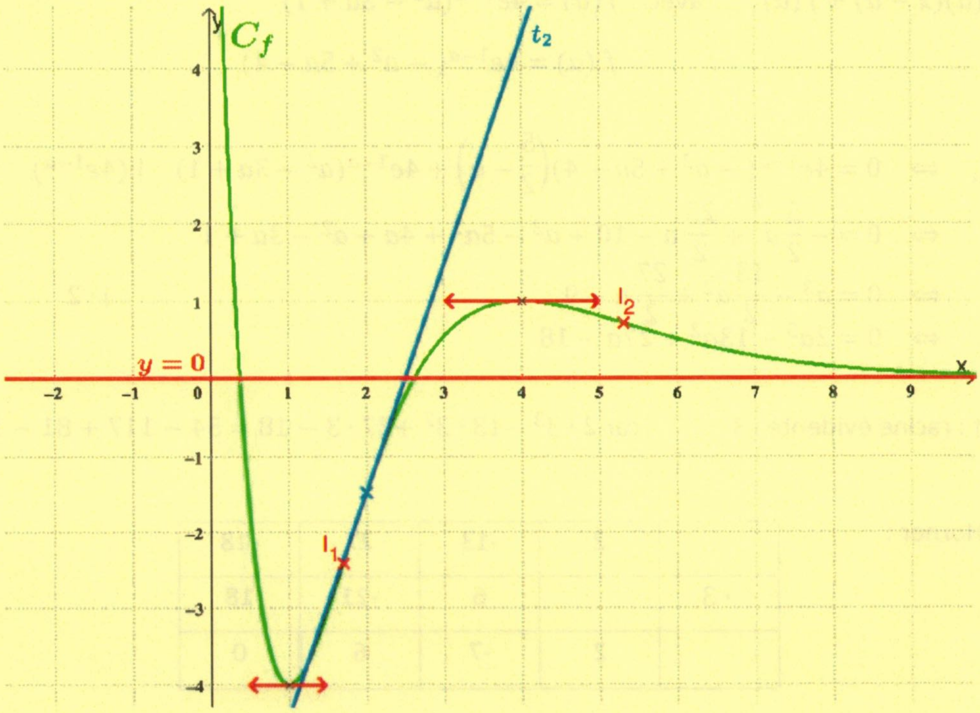
d) L'équation réduite de la tangente t_2 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 est donnée par :

$$t_2 \equiv y = f'(2)(x-2) + f(2) \qquad f(2) = 4(2^2 - 3 \cdot 2 + 1)e^{1-2} = \frac{-4}{e}$$

$$\iff t_2 \equiv y = \frac{8}{e} \cdot (x - 2) + \frac{-4}{e} \qquad f'(2) = 4e^{1-2}(-2^2 + 5 \cdot 2 - 4) = \frac{8}{e}$$

$$\iff t_2 \equiv y = \frac{8}{e}x - \frac{20}{e}$$

e)



2) D'après le graphique de la question 1) e) : $f(x) < 0 \, \forall x \in [1;2]$

Donc l'aire de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
A &= -\int_1^2 f(x)dx \\
&= -4\int_1^2 e^{1-x}(x^2 - 3x + 1)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u(x) = x^2 - 3x + 1 & v'(x) = e^{1-x} \\ u'(x) = 2x - 3 & v(x) = -e^{1-x} \end{bmatrix}$$

$$\overset{IPP}{=} \quad -4\left[-e^{1-x}(x^2 - 3x + 1)\right]_1^2 - 4\int_1^2 e^{1-x}(2x - 3)dx$$

$$\begin{bmatrix} u(x) = 2x - 3 & v'(x) = e^{1-x} \\ u'(x) = 2 & v(x) = -e^{1-x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{IPP}{=} \quad 4\left[e^{1-x}(x^2 - 3x + 1)\right]_1^2 + 4\left[e^{1-x}(2x - 3)\right]_1^2 - 8\int_1^2 e^{1-x}dx \\
&= \quad 4\left[e^{1-x}(x^2 - x - 2)\right]_1^2 - 8\left[-e^{1-x}\right]_1^2 \\
&= \quad 4\left[e^{1-x}(x^2 - x)\right]_1^2 \\
&= \quad 4\left[e^{1-2}(2^2 - 2) - e^{1-1}\underbrace{(1^2 - 1)}_{0}\right] \\
&= \quad \frac{8}{e} \text{ u.a.} \approx 2{,}94 \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

3) Équation réduite de la tangente t_a à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a :

$t_a \equiv y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $f(a) = 4e^{1-a}(a^2 - 3a + 1)$

$$f'(a) = 4e^{1-a}(-a^2 + 5a - 4)$$

$$\begin{aligned}
A\left(\frac{5}{2};0\right) \in t_a \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = 4e^{1-a}(-a^2+5a-4)\left(\frac{5}{2}-a\right) + 4e^{1-a}(a^2-3a+1) \quad |:(4e^{1-a}) \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = -\frac{5}{2}a^2 + \frac{25}{2}a - 10 + a^3 - 5a^2 + 4a + a^2 - 3a + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = a^3 - \frac{13}{2}a^2 + \frac{27}{2}a - 9 \quad | \cdot 2 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = 2a^3 - 13a^2 + 27a - 18
\end{aligned}$$

Calcul à part : racine évidente : 3 car $2 \cdot 3^3 - 13 \cdot 3^2 + 27 \cdot 3 - 18 = 54 - 117 + 81 - 18 = 0$

Schéma de Horner :

	2	-13	27	-18
$\cdot 3$		6	-21	18
	2	-7	6	0

$$\begin{aligned}
A\left(\frac{5}{2};0\right) \in t_a \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = (a-3)(2a^2 - 7a + 6) \\
&\Leftrightarrow \quad a - 3 = 0 \ \vee \ 2a^2 - 7a + 6 = 0 \qquad \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a = 3 \ \vee \ a = \frac{7-1}{2 \cdot 2} \ \vee \ a = \frac{7+1}{2 \cdot 2} \\
&\Leftrightarrow \quad a = 3 \ \vee \ a = \frac{3}{2} \ \vee \ a = 2
\end{aligned}$$

$\mathcal{C}_f$ admet donc trois tangentes passant par le point $A\left(\frac{5}{2};0\right)$: la première au point d'abscisse $\frac{3}{2}$, la seconde au point d'abscisse 2 et la troisième au point d'abscisse 3.

Question 4 **4 + 4 = 8 points**

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{x+2}{x-2}\right)}_{\to 1}^{\overbrace{2-x}^{\to-\infty}}$ $f.i.$ "1^{∞}" Calcul à part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

Alternative 1 :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{2-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{2-x}$$

Posons : $h = \frac{4}{x-2} \Leftrightarrow x = \frac{4}{h}+2$

$$= \lim_{h\to 0}(1+h)^{2-\left(\frac{4}{h}+2\right)}$$

Si $x\to+\infty$, alors $h\to 0$

$$= \lim_{h\to 0}(1+h)^{-\frac{4}{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\underbrace{(1+h)^{\frac{1}{h}}}_{\to e}\right]^{-4}$$

$$= e^{-4}$$

Alternative 2 :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{(2-x)ln\frac{x+2}{x-2}}$$

Calcul de la limite de l'exposant :

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(2-x)}_{\to-\infty}\underbrace{\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)}_{\to 0} \qquad f.i.\ "\infty\cdot 0"$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{2-x}}_{\to 0}} \qquad f.i.\ "\frac{0}{0}"$$

[Calcul à part :

$$\left[\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right]' = \frac{\frac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)^2}}{\frac{x+2}{x-2}} = \frac{-4}{(x+2)(x-2)}\Bigg|$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-4}{(x+2)(x-2)}}{\frac{1}{\underbrace{(2-x)^2}_{=(x-2)^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4(x-2)}{(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x}{x} = \lim_{x\to+\infty} -4$$

$$= -4$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{-4}$

2) $f(x) = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{2-x}$

C.E. : (1) $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

(2) $\frac{x+2}{x-2} > 0$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]2; +\infty\right[$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+2}{x-2}$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

donc $\mathrm{dom}f = \mathrm{dom}f' = \left]-\infty; -2\right[\cup \left]2; +\infty\right[$

$f(x) = e^{(2-x)\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[-\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + (2-x)\cdot\frac{\frac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)^2}}{\frac{x+2}{x-2}}\right]\cdot e^{(2-x)\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)} \\ &= \left[-\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - (x-2)\cdot\frac{-4}{(x+2)(x-2)}\right]\cdot\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{2-x} \\ &= \left[\frac{4}{x+2} - \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right]\cdot\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{2-x} \end{aligned}$$