

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT

Date : 06.06.23 Durée : 08:15 - 10:00

Discipline : Mathématiques - Mathématiques-Structures Section(s) : CD / CD-4LANG

Question 1 (6+4+5+6+7=28 points)

a. $z^2 + (2+5i)z - 9 + 7i = 0$

$$\Delta = (2+5i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9+7i) = -21 + 20i + 36 - 28i = 15 - 8i$$

Soit $u = x + yi$ (x, y réels) tel que : $u^2 = \Delta$. Alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy = -8 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = 17 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (3) : 2x^2 = 32 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$$

$$(3) - (1) : 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 1$$

D'après (2), x et y sont de signes opposés, donc : $u = -4 + i \vee u = 4 - i$

$$z_1 = \frac{-2 - 5i - 4 + i}{2} = -3 - 2i$$

$$z_2 = \frac{-2 - 5i + 4 - i}{2} = 1 - 3i$$

$$S = \{-3 - 2i; 1 - 3i\}$$

b. Posons : $z = x + iy$ (x, y réels)

$$2z + 1 - i = (1 - i)\bar{z} \Leftrightarrow 2x + 2iy + 1 - i = (1 - i)(x - iy)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 + i(2y - 1) = x - y - i(x + y)$$

$$\Leftrightarrow x + y + 1 + i(x + 3y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L2 \leftrightarrow L2 - L1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 & (1) \\ 2y = 2 & (2) \end{cases}$$

$$(2) : 2y = 2 \Leftrightarrow y = 1$$

$$y = 1 \rightarrow (1) : x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = -2$$

$$S = \{-2 + i\}$$

c. Calcul de $P(2-3i)$ à l'aide du schéma de Horner

	1	$3i$	$-1+6i$	$-6+9i$
$2-3i$	0	$2-3i$	$4-6i$	$6-9i$
	1	2	3	0

Donc $P(2-3i) = 0$ c'est-à-dire $2-3i$ est une racine de P .

Division de P par $(z-2+3i)$: $P(z) = (z-2+3i) \underbrace{(z^2+2z+3)}_{Q(z)}$

Résolution de l'équation $Q(z) = 0$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$$

$$z_1 = \frac{-2 - \sqrt{8i}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}i}{2} = -1 - \sqrt{2}i$$

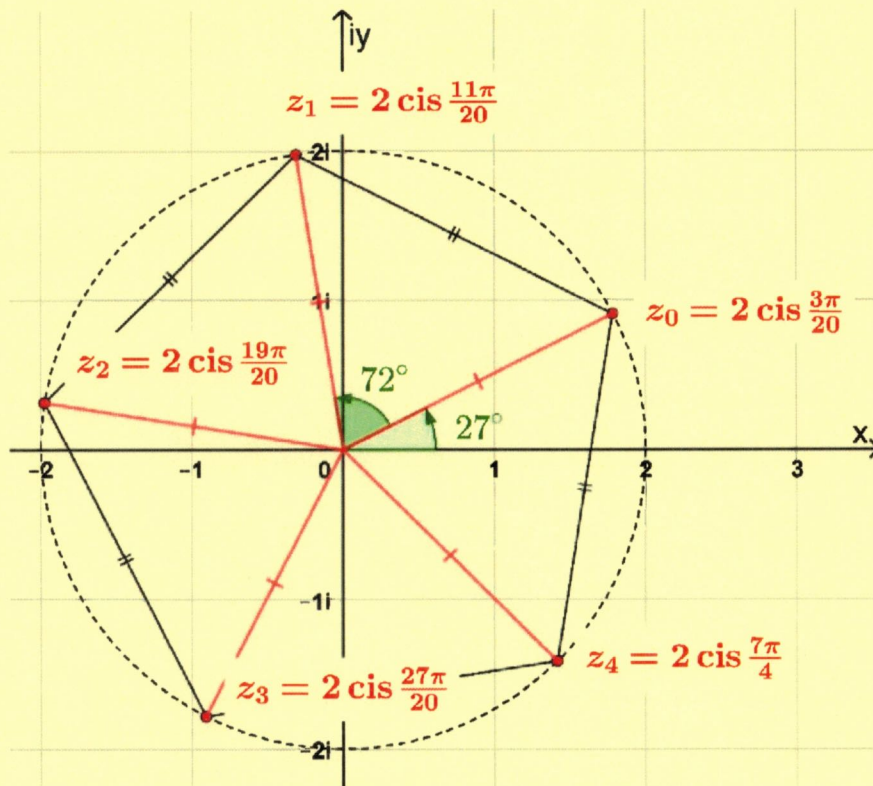
$$z_2 = \frac{-2 + \sqrt{8i}}{2} = -1 + \sqrt{2}i$$

$$S = \{2-3i; -1-\sqrt{2}i; -1+\sqrt{2}i\}$$

d. $32i \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = 2^5 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = 2^5 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$

$$z^5 = 2^5 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow z = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{20} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \right) \quad (k \text{ entier})$$

$$S = \left\{ 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{20}; 2 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{20}; 2 \operatorname{cis} \frac{19\pi}{20}; 2 \operatorname{cis} \frac{27\pi}{20}; 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4} \right\}$$



$$e. |z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 ; \arg(z_1)_{z_1 \in \text{II quadrant}} = +\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

$$z_1 = -\sqrt{3} + i = 2\text{cis}\frac{5\pi}{6}$$

$$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} ; \arg(z_2)_{z_2 \in \text{IV quadrant}} = -\cos^{-1}\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$|z_3| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 ; \arg(z_3)_{z_3 \in \text{III quadrant}} = -\cos^{-1}\frac{0}{1} = -\cos^{-1}0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$z_3 = -i = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Forme trigonométrique de Z

$$Z = \frac{z_1^3 z_2^5}{z_3^{2023}} = \frac{2^3 \text{cis}\frac{5\pi}{2} \cdot (2\sqrt{2})^5 \text{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)}{\text{cis}\left(-\frac{2023\pi}{2}\right)} = \frac{1024\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}}{\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)} = 1024\sqrt{2}\text{cis}\frac{11\pi}{4} = 1024\sqrt{2}\text{cis}\frac{3\pi}{4}$$

Forme algébrique de Z

$$Z = 1024\sqrt{2}\text{cis}\frac{3\pi}{4} = 1024\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 1024\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1024 + 1024i$$

Question 2 (6+4+3+4=17 points)

$$\begin{cases} (m-1)x + y + z = 2m \\ 2x - my + (m+2)z = m+1 \\ 2x + my - z = 7 \end{cases}$$

a. $\Delta = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 2 & -m & m+2 \\ 2 & m & -1 \end{vmatrix}$ (on développe suivant la première colonne)

$$= (m-1) \cdot \begin{vmatrix} -m & m+2 \\ m & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -m & m+2 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)(m-m^2-2m) - 2(-1-m) + 2(m+2+m)$$

$$= (m-1)(-m^2-m) + 2+2m+4+4m$$

$$= -m^3 + m + 6m + 6$$

$$= -m^3 + 7m + 6$$

$$-(-1)^3 + 7 \cdot (-1) + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$$

$-m^3 + 7m + 6$ est donc divisible par $m+1$

Schéma de Horner

	-1	0	7	6
-1	0	1	-1	-6
	-1	1	6	0

$$\Delta = -m^3 + 7m + 6 = (m+1)(-m^2 + m + 6) = -(m+1)(m+2)(m-3)$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -2 \vee m = -1 \vee m = 3$$

Le système admet une solution unique si et seulement si $m \neq -2 \wedge m \neq -1 \wedge m \neq 3$.

b. $m = -3$

$$\begin{cases} -4x + y + z = -6 \\ 2x + 3y - z = -2 \\ 2x - 3y - z = 7 \end{cases} \begin{array}{l} L2 \leftrightarrow 2L2 + L1 \\ L3 \leftrightarrow 2L3 + L1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + y + z = -6 \\ 7y - z = -10 \\ -5y - z = 8 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \\ L3 \leftrightarrow 7L3 + 5L2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + y + z = -6 \\ 7y - z = -10 \\ -12z = 6 \end{cases} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$(3) : 12z = -6 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow (2) : 7y - (-\frac{1}{2}) = -10 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow (1) : -4x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -6 \Leftrightarrow x = 1$$

$$S = \left\{ \left(1; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

Interprétation géométrique

Le système est formé d'équations cartésiennes de 3 plans qui se coupent au point $I\left(1; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

c. $m = -1$

$$\begin{cases} -2x + y + z = -2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 7 \end{cases} \begin{array}{l} L2 \leftrightarrow L2 + L1 \\ L3 \leftrightarrow L3 + L1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = -2 & (1) \\ 2y + 2z = -2 & (2) \\ 0 = 5 & (3) \end{cases}$$

Comme (3) est impossible, le système est impossible.

$$S = \emptyset$$

Interprétation géométrique

Le système est formé d'équations cartésiennes de 3 plans qui n'ont aucun point en commun.

 d. $m = 3$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ 2x - 3y + 5z = 4 \\ 2x + 3y - z = 7 \end{cases} \begin{array}{l} L2 \leftrightarrow L2 - L1 \\ L3 \leftrightarrow L3 - L1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ -4y + 4z = -2 \\ 2y - 2z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \\ L3 \leftrightarrow 2L3 + L2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 6 & (1) \\ -4y + 4z = -2 & (2) \\ 0 = 0 & (3) \end{cases}$$

Comme (3) est indéterminée, le système est simplement indéterminé.

En posant $z = \lambda$,

$$(2) : -4y + 4\lambda = -2 \Leftrightarrow y = \lambda + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow (1) : 2x + \lambda + \frac{1}{2} + \lambda = 6 \Leftrightarrow x = -\lambda + \frac{11}{4}$$

$$S = \left\{ \left(-\lambda + \frac{11}{4}; \lambda + \frac{1}{2}; \lambda \right) : \lambda \text{ réel} \right\}$$

Interprétation géométrique

Le système est formé d'équations cartésiennes de 3 plans qui se coupent en la droite d passant par

$$A\left(\frac{11}{4}; \frac{1}{2}; 0\right) \text{ et dont un vecteur directeur est } \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Question 3 (1+4+2+5+1+2 = 15 points)

a. $A(2;1;1)$; $B(-2;4;0)$; $C(3;2;3)$ et $D(-3;2;3)$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -4\lambda \\ 1 = 3\lambda \\ 2 = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{4} \\ \lambda = \frac{1}{3} \\ \lambda = -2 \end{cases} \text{ impossible, donc } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés.}$$

OU

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & \vec{i} \\ 3 & 1 & \vec{j} \\ -1 & 2 & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 7\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k} \neq \vec{0}$$

Donc A, B et C ne sont pas alignés.

b. $M(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -4 & 1 \\ y-1 & 3 & 1 \\ z-1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \cdot 7 - (y-1) \cdot (-7) + (z-1) \cdot (-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x + 7y - 7z - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - z - 2 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv x + y - z - 2 = 0}$$

OU

$$\vec{n} = \frac{1}{7} (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal de } \pi, \text{ donc : } \pi \equiv x + y - z + k = 0 \text{ (} k \text{ réel)}$$

$$A(2;1;1) \in \pi \Leftrightarrow 2 + 1 - 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = -2$$

$$\boxed{\pi \equiv x + y - z - 2 = 0}$$

c. $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de π , donc un vecteur directeur de d et $d \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ (λ réel)

$$d. d' \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 3z = -1 \end{cases} \quad |L2 \leftrightarrow L2 - 2L1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y + z = -3 \end{cases}$$

$$\text{Système d'équations paramétriques de } d' \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ y = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda \quad (\lambda \text{ réel}) \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\text{Vecteur directeur de } d' : \vec{v}' = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{n} \cdot \vec{v}' = 1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -6 \neq 0$, donc \vec{n} n'est pas orthogonal à \vec{v}'
et d' n'est pas parallèle à π .

OU

$$\text{Vecteur directeur de } d' : \vec{v}' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \vec{i} \\ -1 & 0 & \vec{j} \\ 1 & 3 & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \text{ donc : } \vec{v}' = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{n} \cdot \vec{v}' = 1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -6 \neq 0$, donc \vec{n} n'est pas orthogonal à \vec{v}'
et d' n'est pas parallèle à π .

$$e. \begin{cases} -2 - (-2) + 1 = 1 \\ 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = -1 \end{cases}, \text{ donc : } E(-2; -2; 1) \in d'$$

$$f. \text{ vecteurs directeurs de } \pi' : \vec{v}' = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\pi' \equiv \begin{cases} x = -3 - 3\lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda - 4\mu \quad (\lambda, \mu \text{ réels}) \\ z = 3 + 2\lambda - 2\mu \end{cases}$$