

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT

Date :	06.06.23	Durée :	08:15 - 10:15
Discipline :	Mathématiques	Section(s) :	CA-MALA / CA-MALF / CE / CE-4LANG / CF / CG / CG-4LANG / CG-COMED / CG-URBS

Question 1 (8 points)

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{z-y}{3} = 0 \\ 2(4x-y) - 3(2z-3x+4) = 4(4x+2y-3) - 2(z+2y) + 1 \\ \frac{x+3z}{6} - \frac{2y+z}{2} = 1,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y - 2z + 2y = 0 \\ 8x - 2y - 6z + 9x - 12 = 16x + 8y - 12 - 2z - 4y + 1 \\ x + 3z - 6y - 3z = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y - 2z = 0 & (1) \\ x - 6y - 4z = 1 & (2) \\ x - 6y = 9 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -2 \cdot (1) : \quad -6x \quad - \quad 10y \quad + \quad 4z = \quad 0 \\ (2) : \quad \quad x \quad - \quad 6y \quad - \quad 4z = \quad 1 \\ \hline (2') : \quad -5x \quad - \quad 16y \quad \quad \quad = \quad 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y - 2z = 0 & (1) \\ -5x - 16y = 1 & (2') \\ x - 6y = 9 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} (2') : \quad -5x \quad - \quad 16y = \quad 1 \\ 5 \cdot (3) : \quad \quad 5x \quad - \quad 30y = \quad 45 \\ \hline (3') : \quad \quad \quad - \quad 46y = \quad 46 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y - 2z = 0 & (1) \\ -5x - 16y = 1 & (2') \\ -46y = 46 & (3') \end{cases}$$

De (3') :

$$y = -1$$

Dans (2') :

$$\begin{aligned} -5x + 16 = 1 &\Leftrightarrow -5x = -15 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Dans (1) :

$$\begin{aligned} 9 - 5 - 2z = 0 &\Leftrightarrow 4 = 2z \\ &\Leftrightarrow z = 2 \end{aligned}$$

$$S = \{(3; -1; 2)\}$$

Question 2 (12 points)

Soient x le nombre de Pères Noël de taille S et y le nombre de Pères Noël de taille L.
 x et y sont des nombres entiers naturels.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 60 \\ 2x + y \leq 40 \\ x + 3y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Construire les 5 droites

- $d_1 \equiv 2x + 3y = 60 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 20$

x	30	6
y	0	16

Point-test : $O(0;0) : 0 \leq 60$ donc O appartient au demi-plan d'inéquation $2x + 3y \leq 60$.

- $d_2 \equiv 2x + y = 40 \Leftrightarrow y = -2x + 40$

x	20	12
y	0	16

Point-test : $O(0;0) : 0 \leq 40$ donc O appartient au demi-plan d'inéquation $2x + y \leq 40$.

- $d_3 \equiv x + 3y = 50 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{50}{3}$

x	5	20
y	15	10

Point-test : $O(0;0) : 0 \leq 50$ donc O appartient au demi-plan d'inéquation $x + 3y \leq 50$.

- $d_4 \equiv x = 0$

x	0	0
y	0	10

Point-test : $I(10;0) : 10 \geq 0$ donc I appartient au demi-plan d'inéquation $x \geq 0$.

- $d_5 \equiv y = 0$

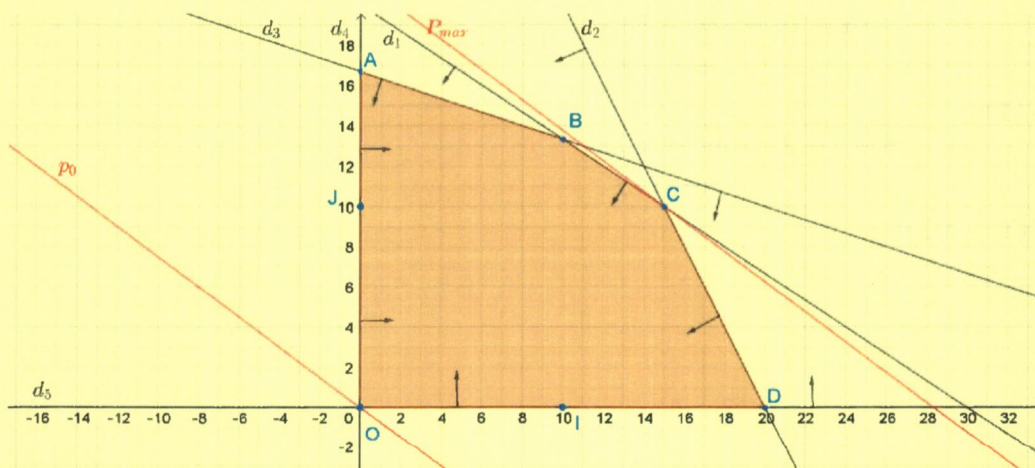
x	0	10
y	0	0

Point-test : $J(0;10) : 10 \geq 0$ donc J appartient au demi-plan d'inéquation $y \geq 0$.

La fonction profit est définie par $p(x;y) = 3x + 4y$.

Soit $p_0 \equiv 3x + 4y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x$

x	0	-4
y	0	3



La droite p_{max} parallèle à p_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est la plus éloignée de l'origine passe par le point C , intersection des droites d_1 et d_2 .

D'après le graphique, $C(15;10)$.

Le profit du chocolatier est maximal en fabriquant 15 figures de taille S et 10 figures de taille L.

Le bénéfice s'élève alors à $p(15;10) = 45 + 40 = 85\text{€}$.

Question 3 (8 ((3+3)+2) points)

1)

a)

$$8 \cdot 3^{4x+1} - 11 = 7 + 6 \cdot 3^{4x+1} \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{4x+1} = 18$$

$$\Leftrightarrow 3^{4x+1} = 9$$

$$\Leftrightarrow (4x + 1) \cdot \log 3 = \log 9$$

$$\Leftrightarrow 4x + 1 = \frac{\log 9}{\log 3}$$

$$\Leftrightarrow 4x + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$$

b)

$$5 \cdot \log_4(2x - 6) + 7 = 8 \cdot \log_4(2x - 6) - 2 \Leftrightarrow -3 \cdot \log_4(2x - 6) = -9$$

$$\Leftrightarrow \log_4(2x - 6) = 3$$

$$\Leftrightarrow 4^{\log_4(2x-6)} = 4^3$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 = 4^3$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 = 64$$

$$\Leftrightarrow 2x = 70$$

$$\Leftrightarrow x = 35$$

35 est à accepter.

$$S = \{35\}.$$

2)

$$\begin{aligned} \log(\sqrt{a \cdot b^3}) &= \frac{1}{2} \log(a \cdot b^3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\log a + \log b^3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\log a + 3 \cdot \log b) \\ &= \frac{1}{2} \cdot [3 + 3 \cdot (-4)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-9) \\ &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

Question 4 (11 (5+4+2) points)

1) $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 6}{2} \quad (\Delta = 36)$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$$

$$f(-2) = \frac{17}{3}; \quad f(4) = -\frac{37}{3}$$

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$	+	0	-	0
f		$\frac{17}{3}$	$-\frac{37}{3}$	

↙
↘
↗

max
min

$A\left(-2; \frac{17}{3}\right)$ est le maximum et $B\left(4; -\frac{37}{3}\right)$ est le minimum de la courbe C_f .

2) $f''(x) = x - 1$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(1) = -\frac{10}{3}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x) = x - 1$	-	0	+
C_f	∩	$-\frac{10}{3}$	∪

PI

$C\left(1; -\frac{10}{3}\right)$ est le point d'inflexion de la courbe C_f .

3) $t_{-3} \equiv y = mx + p$.

Or $m = f'(-3) = \frac{7}{2}$ et t_{-3} passe par le point $D(-3; f(-3)) = D(-3; 4)$.

$$D(-3; 4) \in t_{-3} \Leftrightarrow 4 = \frac{7}{2} \cdot (-3) + p \Leftrightarrow p = \frac{29}{2}$$

$$t_{-3} \equiv y = \frac{7}{2}x + \frac{29}{2}$$

ou bien

$$t_{-3} \equiv y = f'(-3) \cdot (x + 3) + f(-3)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{7}{2}(x + 3) + 4$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{7}{2}x + \frac{21}{2} + \frac{8}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{7}{2}x + \frac{29}{2}$$

Question 5 (6 (2+2+2) points)

1) On déduit du graphique le tableau des signes de $f'(x)$ et donc le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
f	↘		↘		↗
		TH		TH	

2) On obtient :

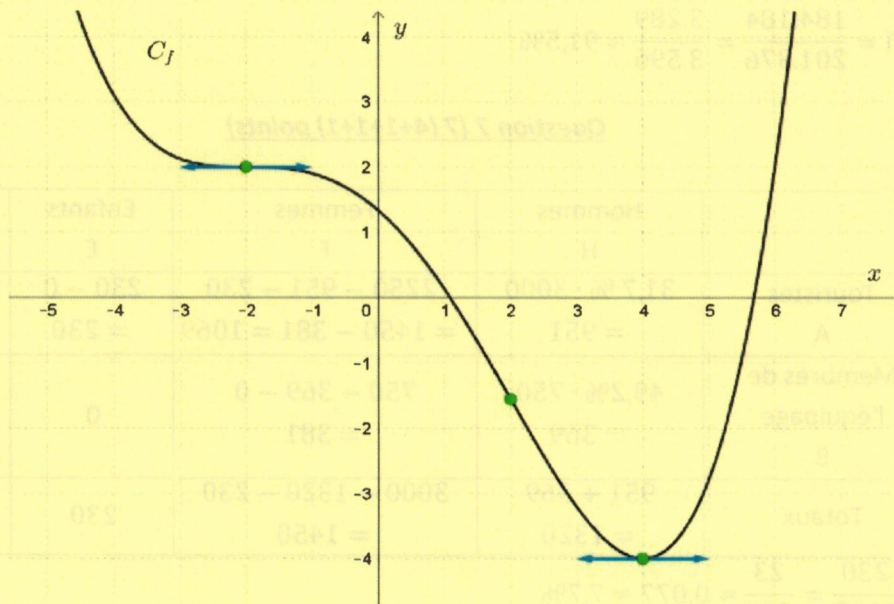
x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
f'		0		-4	
$(f'(x))' = f''(x)$	+	0	-	0	+

Connaissant le signe de $f''(x)$, on peut en déduire le tableau de concavité de la fonction

f :

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
C_f	∪		∩		∪
		PI		PI	

3)



Question 6 (8 (2+3+3) points)

On tire simultanément une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. L'ordre n'importe pas.

Il y a : $C_{32}^5 = 201.376$ tirages possibles.

1) A : « la main contient exactement un roi et deux dames. »

On tire 1 roi parmi 4, 2 dames parmi 4 et 2 autres cartes parmi 24.

Nombre de cas favorables : $C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{24}^2 = 4 \cdot 6 \cdot 276 = 6.624$

$$P(A) = \frac{6.624}{201.376} = \frac{207}{6.293} \approx 3,3\%$$

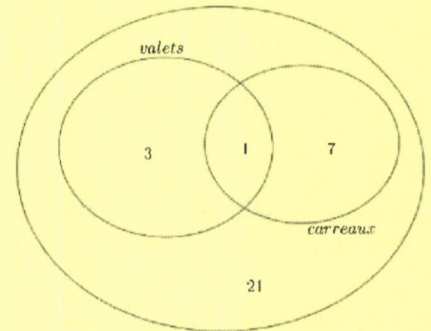
2) B : « la main contient exactement un valet et un carreau. »

On tire le valet de carreau et 4 autres cartes parmi 21 ou bien on tire 1 valet (non carreau) parmi 3, 1 carreau (non valet) parmi 7 et 3 autres cartes parmi 21.

Nombre de cas favorables :

$$C_1^1 \cdot C_{21}^4 + C_3^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{21}^3 = 1 \cdot 5.985 + 3 \cdot 7 \cdot 1.330 = 33.915$$

$$P(B) = \frac{33.915}{201.376} = \frac{4.845}{28.768} \approx 16,8\%$$



3) C : « la main contient au plus deux trèfles. »

On tire aucun trèfle parmi 8 et 5 autres cartes parmi 24 ou bien on tire 1 trèfle parmi 8 et 4 autres cartes parmi 24 ou bien 2 trèfles parmi 8 et 3 autres cartes parmi 24.

Nombre de cas favorables :

$$C_8^0 \cdot C_{24}^5 + C_8^1 \cdot C_{24}^4 + C_8^2 \cdot C_{24}^3 = 1 \cdot 42.504 + 8 \cdot 10.626 + 28 \cdot 2.024 = 184.184$$

$$P(C) = \frac{184.184}{201.376} = \frac{3.289}{3.596} \approx 91,5\%$$

Question 7 (7 (4+1+1+1) points)

1)

	Hommes H	Femmes F	Enfants E	Totaux
Touristes A	$31,7\% \cdot 3000$ $= 951$	$2250 - 951 - 230$ $= 1450 - 381 = 1069$	$230 - 0$ $= 230$	$3000 - 750$ $= 2250$
Membres de l'équipage B	$49,2\% \cdot 750$ $= 369$	$750 - 369 - 0$ $= 381$	0	$25\% \cdot 3000$ $= 750$
Totaux	$951 + 369$ $= 1320$	$3000 - 1320 - 230$ $= 1450$	230	3000

2) $p(E) = \frac{230}{3000} = \frac{23}{300} \approx 0,077 \approx 7,7\%$

3) $p(F \text{ et } A) = \frac{1069}{3000} \approx 0,356 \approx 35,6\%$

4) $p(A \text{ si } H) = \frac{951}{1320} = \frac{317}{440} \approx 0,720 \approx 72,0\%$