EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES			
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT			
Date :	08.06.23	*Durée :*	08:15 - 11:00
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse	*Section(s) :*	CC / CC-4LANG

Question de théorie **(4+2 = 6 pts.)**

1. Voir EM66 page 56/57
2. Voir EM66 page 67

Question 1 **(4+2+6+3+4 = 19 pts.)**

1. CE : $x \neq 0$ et $x > 0$ $\qquad D_f =]0;+\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} -\frac{3}{2} + \frac{3\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \qquad \text{A.V.: } x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{3}{2} + \frac{3\ln x \to +\infty}{x \to +\infty} \overset{(*)}{=} -\frac{3}{2} \qquad \text{A.H.: } y = -\frac{3}{2}$$

$(*)$calcul à part :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

2. $y_{C_f} - y_{AH} = f(x) - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3\ln x}{x} > 0$ $\qquad$ *f'(x)* prend le signe de $\ln x$

$$y_{C_f} - y_{AH} > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \overset{bij \nearrow}{\Leftrightarrow} x > 1$$

x	0		1		$+\infty$
Position relative	||	A.H. au-dessus de C_f	| C_f coupe A.H.	C_f au-dessus de A.H.	

3. $D_{f'} =]0;+\infty[$

$$\forall x \in]0;+\infty[: f'(x) = 3 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{3 \cdot (1 - \ln x)}{x^2} \qquad f'(x) \text{ prend le signe de } 1 - \ln x$$

$$\begin{aligned} 1 - \ln x > 0 &\Leftrightarrow 1 > \ln x \\ &\Leftrightarrow \ln x < 1 \\ &\overset{bij \nearrow}{\Leftrightarrow} x < e \end{aligned}$$

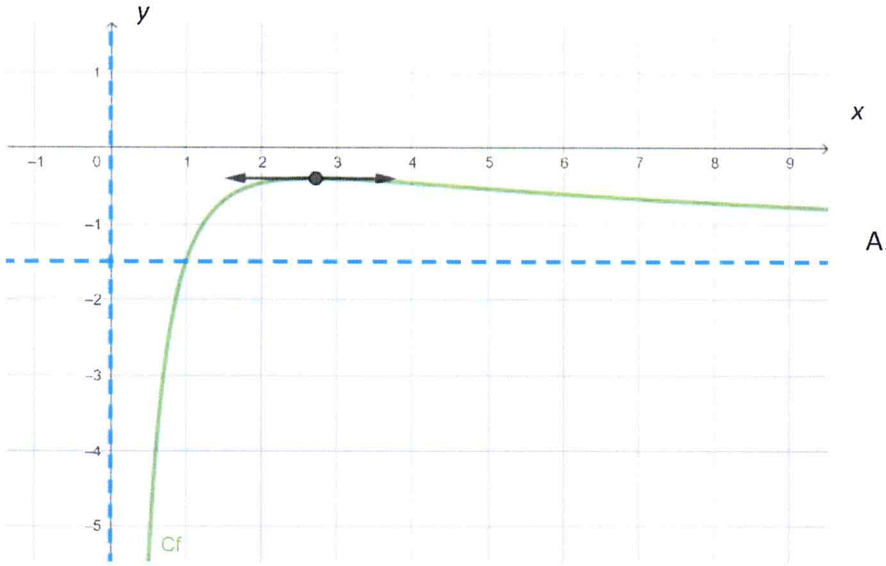
Tdv :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	−	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$-0,4$	↘	$-\frac{3}{2}$

f admet un maximum (absolu) en $x = e$ avec $f(e) \simeq -0,4$ donc $\forall x \in]0;+\infty[: f(x) < 0$.

4. Tableau de valeurs :

x	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	-5.66	-1.50	-0.46	-0.40	-0.46	-0.53	-0.60	-0.67	-0.72



A.H. : $y=-\frac{3}{2}$

A.V. : $x=0$

5. f est négative sur $\left[1;e^2\right]$, donc :

$$A=-\int_1^{e^2} f(x)dx$$

$$=-\int_1^{e^2}\left(-\frac{3}{2}+3\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=-\left[-\frac{3}{2}x+3\cdot\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^{e^2}$$

$$=-\left(-\frac{3e^2}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}+0\right)$$

$$=\frac{3e^2}{2}-\frac{15}{2}\ u.a. \qquad (\simeq 3{,}58\ u.a.)$$

Question 2 **(4,5+4,5 = 9 pts.)**

1. $\left(3^{x+1}-4\right)\cdot 3^x \le -1 \qquad (*) \qquad D_E=\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x}-4\cdot 3^x+1\le 0 \qquad$ *posons* $y=3^x, y>0$

$\Leftrightarrow 3y^2-4y+1\le 0 \qquad \Delta=4 \quad y_1=\frac{4-\sqrt{4}}{6}=\frac{1}{3} \ ; \ y_2=\frac{4+\sqrt{4}}{6}=1$

y	0		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3y^2-4y+1$	||	+	0	−	0	+	

$$3y^2-4y+1\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \overset{(1)}{\le} y \overset{(2)}{\le} 1$$

Revenons à x :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le 3^x \Leftrightarrow 3^{-1} \le 3^x \overset{bij \nearrow}{\Leftrightarrow} -1 \le x$$

$$(2) \Leftrightarrow 3^x \le 1 \Leftrightarrow 3^x \le 3^0 \overset{bij \nearrow}{\Leftrightarrow} x \le 0$$

Donc $(*) \Leftrightarrow -1 \le x \le 0$ $\qquad S = [-1;0]$

2. $\log_{\sqrt{3}}(3-x) - \log_3(x+1) - \log_9 25 = 0 \qquad (*)$

$C.E.:$ $3-x>0 \Leftrightarrow x<3$ $\qquad x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ $\qquad D_E =]-1;3[$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\ln(3-x)}{\ln\sqrt{3}} - \frac{\ln(x+1)}{\ln 3} - \frac{\ln 25}{\ln 9} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\ln(3-x)}{\ln 3} - \frac{\ln(x+1)}{\ln 3} - \frac{2\ln 5}{2\ln 3} = 0 \qquad |\cdot \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \ln(3-x)^2 = \ln(x+1) + \ln 5$$

$$\Leftrightarrow \ln(9-6x+x^2) = \ln(5x+5) \qquad |bij \nearrow$$

$$\Leftrightarrow 9-6x+x^2 = 5x+5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 4 = 0$$

$$\Delta = 105 \quad x_1 = \frac{11-\sqrt{105}}{2} \simeq 0{,}38 \qquad x_2 = \frac{11+\sqrt{105}}{2} \simeq 10{,}62 \notin D_E$$

$$S = \left\{ \frac{11-\sqrt{105}}{2} \right\}$$

Question 3 **(3+3 = 6 pts.)**

1. $\lim\limits_{n\to 0} \left(1+\frac{2n}{5}\right)^{\frac{2}{n}+4} \quad (*) \qquad 1^\infty \; f.i.$

posons : $x = \frac{2n}{5} \Leftrightarrow n = \frac{5x}{2}$ $\qquad$ si $n \to 0$, alors $x \to 0$

$$(*) = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2\cdot 2}{5x}+4} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{5}+4} = \underbrace{\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]}_{e}^{\frac{4}{5}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}(1+x)^4}_{1} = e^{\frac{4}{5}} \cdot 1 = e^{\frac{4}{5}}$$

2. Soit $f(x) = e^{\tan^2 x}$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = e$$

$$f'(x) = e^{\tan^2 x} \cdot 2\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = e \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4e$$

$$t \equiv y = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = 4ex - \pi e + e$$

Question 4 **(3+5+6 = 14 pts.)**

1. $$f(x)=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{3\left(2x+\frac{1}{3}\right)}_{u'}\underbrace{\left(3x^2+x-5\right)}_{u}$$

$$F(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(3x^2+x-5\right)^2+c \qquad ,c\in\mathbb{R}$$

$$F(-2)=0 \qquad \Leftrightarrow \frac{1}{6}(12-2-5)^2+c=0$$

$$\Leftrightarrow c=-\frac{25}{6}$$

Donc la primitive vérifiant les conditions est $F(x)=\dfrac{\left(3x^2+x-5\right)^2-25}{6}$.

2. $$\int_1^0\frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_1^0\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}dx+\int_1^0\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$=\int_1^0-(-2x)\cdot\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx+\int_1^0\frac{-3\cdot2\cdot\frac{1}{2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{\frac{1}{2}}\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]_1^0+\left[-3\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_1^0$$

$$=-2\left(4^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}}\right)-3\left(0-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-2\left(2-\sqrt{3}\right)+\frac{\pi}{2}$$

$$\simeq 1{,}03$$

3. $$A(x)=\int-e^{3x}\cos(-2x)\,dx$$

$$=-\int e^{3x}\cos(-2x)\,dx$$

IPP $\quad u(x)=\cos(-2x) \qquad v'(x)=e^{3x}$

$\quad u'(x)=2\sin(-2x) \qquad v(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$

$$=-\left[\frac{1}{3}e^{3x}\cos(-2x)\right]+\frac{2}{3}\int e^{3x}\sin(-2x)\,dx$$

IPP $\quad u(x)=\sin(-2x) \qquad v'(x)=e^{3x}$

$\quad u'(x)=-2\cos(-2x) \qquad v(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$

$$=-\left[\frac{1}{3}e^{3x}\cos(-2x)\right]+\frac{2}{3}\left\{\left[\frac{1}{3}e^{3x}\sin(-2x)\right]+\frac{2}{3}\int e^{3x}\cos(-2x)\,dx\right\}$$

$$=-\frac{1}{3}e^{3x}\cos(-2x)+\frac{2}{9}e^{3x}\sin(-2x)+\frac{4}{9}\underbrace{\int e^{3x}\cos(-2x)\,dx}_{=-A(x)}$$

Donc :

$A(x)=-\frac{1}{3}e^{3x}\cos(-2x)+\frac{2}{9}e^{3x}\sin(-2x)+\frac{4}{9}(-A(x))+c \qquad ,c\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{13}{9}A(x)=-\frac{1}{3}e^{3x}\cos(-2x)+\frac{2}{9}e^{3x}\sin(-2x)+c \qquad ,c\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow A(x)=\frac{9}{13}\left(-\frac{1}{3}e^{3x}\cos(-2x)+\frac{2}{9}e^{3x}\sin(-2x)\right)+k \qquad ,k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow A(x)=-\frac{3}{13}e^{3x}\cos(-2x)+\frac{2}{13}e^{3x}\sin(-2x)+k \qquad ,k\in\mathbb{R}$

Question 5 **(6 pts.)**

Position de C_f par rapport à C_g :

$f(x)>g(x)$

$\Leftrightarrow x^2+2x+2>\frac{1}{2}x+3$

$\Leftrightarrow x^2+\frac{3}{2}x-1>0$

$\Delta=\frac{25}{4} \qquad x_1=-2 \qquad x_2=\frac{1}{2}$

Position :

X	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Position relative		C_f / C_g	C_f coupe C_g	C_g / C_f	C_f coupe C_g	C_f / C_g	

De plus $f(x)=x^2+2x+1+1=(x+1)^2+1>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

$V=\pi\int_{-2}^{\frac{1}{2}}\left(g^2(x)-f^2(x)\right)dx$

$=\pi\int_{-2}^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2-\left(x^2+2x+2\right)^2\right)dx$

$=\pi\int_{-2}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2+3x+9-x^4-4x^2-4-4x^3-4x^2-8x\right)dx$

$=\pi\int_{-2}^{\frac{1}{2}}\left(-x^4-4x^3-\frac{31}{4}x^2-5x+5\right)dx$

$=\pi\left[-\frac{x^5}{5}-x^4-\frac{31}{12}x^3-\frac{5}{2}x^2+5x\right]_{-2}^{\frac{1}{2}}$

$=\pi\left(\frac{89}{60}+\frac{134}{15}\right)$

$=\frac{125}{12}\pi\ u.v.$

$\simeq 32{,}72\ u.v.$