| | | | |
|---|---|---|---|
| EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES | | | |
| **Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT** | | | |
| *Date :* | 20.09.23 | *Durée :* | 08:15 - 11:15 |
| *Discipline :* | Mathématiques | *Section(s) :* | CB / CB-4LANG |

## Question I

**1)** $P(z) = z^3 + \alpha\, z^2 + \beta\, z + 7 - 9i \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$

**a)** $P(-1+i) = 0 \Leftrightarrow (-1+i)^3 + \alpha\,(-1+i)^2 + \beta\,(-1+i) + 7 - 9i = 0$

$\Leftrightarrow -1 + 3i + 3 - i + \alpha\,(-2i) - \beta + \beta i + 7 - 9i = 0$

$\Leftrightarrow 9 - 7i - 2\alpha i - \beta + \beta i = 0$

$\Leftrightarrow -2\alpha i + (-1+i)\beta = -9 + 7i$

$P(-2) = -17 - 19i \Leftrightarrow -8 + 4\alpha - 2\beta + 7 - 9i = -17 - 19i$

$\Leftrightarrow 4\alpha - 2\beta = -16 - 10i$

$\Leftrightarrow 2\alpha - \beta = -8 - 5i$

$$\begin{cases} -2\alpha i + (-1+i)\beta = -9 + 7i & (1) \\ 2\alpha - \beta = -8 - 5i & (2) \end{cases}$$

$$(1) + i \cdot (2) : -\beta = -4 - i \Leftrightarrow \beta = 4 + i$$

$$\text{Dans } (2) : 2\alpha - 4 - i = -8 - 5i \Leftrightarrow 2\alpha = -4 - 4i \Leftrightarrow \alpha = -2 - 2i$$

**b)** $P(z) = z^3 + (-2-2i)z^2 + (4+i)z + 7 - 9i$

D'après **a)**, $-1+i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $-2-2i$ | $4+i$ | $7-9i$ |
| $-1+i$ | | $-1+i$ | $4-2i$ | $-7+9i$ |
| | $1$ | $-3-i$ | $8-i$ | $0$ |

$$P(z) = (z + 1 - i)[z^2 + (-3-i)z + (8-i)]$$

$$\Delta = (-3-i)^2 - 4(8-i) = 9 + 6i - 1 - 32 + 4i = -24 + 10i$$

Posons : $t = x + yi \ \ (x, y \in \mathbb{R})$ racine carrée complexe de $\Delta$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -24 + 10i$$

$$\text{D'où:} \begin{cases} x^2 + y^2 = 26 & (1) \\ x^2 - y^2 = -24 & (2) \\ xy > 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) : 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$(1) - (2) : 2y^2 = 50 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 5$$

D'après (3): Les racines carrées complexes de $\Delta$ sont : $t_1 = 1 + 5i$ et $t_2 = -1 - 5i$.

$$z_1 = \frac{3 + i + 1 + 5i}{2} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$$

$$z_2 = \frac{3+i-1-5i}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

$$S = \{-1+i; 2+3i; 1-2i\}$$

**c)** Soit $A(-1+i), B(2+3i), C(1-2i)$ .

$$AB = |2+3i+1-i| = |3+2i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$AC = |1-2i+1-i| = |2-3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$BC = |1-2i-2-3i| = |-1-5i| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

Comme $AB = AC$, le triangle$(ABC)$ est isocèle de sommet principal $A$.

On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, car $26 = 13 + 13$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $(ABC)$ est rectangle en $A$.

Donc le triangle $(ABC)$ est isocèle et rectangle en $A$.

**2)** Soit $A\left(-\sqrt{3}-i\right)$ et $B\left(4\sqrt{2}\right)$.

$$A' = r(A) \Leftrightarrow z_{A'} = \text{cis}\,\alpha \cdot z_A$$

$$B = h \circ r(A) \Leftrightarrow z_B = \lambda \cdot z_{A'}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} = \lambda \cdot \text{cis}\,\alpha \cdot \left(-\sqrt{3}-i\right)$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot \text{cis}\ \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{-\sqrt{3}-i} \cdot \frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{-4\sqrt{6}+4\sqrt{2}i}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot \text{cis}\,\alpha = -\sqrt{6}+\sqrt{2}i$$

$$\left|-\sqrt{6}+\sqrt{2}i\right| = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}\,(2\pi)$$

Donc $\lambda \cdot \text{cis}\,\alpha = 2\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{6}$.

1) $\lambda = 2\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}\,(2\pi)$

2) $\lambda = -2\sqrt{2} \Rightarrow -2\sqrt{2}\,\text{cis}\,\alpha = 2\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2\sqrt{2}\,\text{cis}\,(\alpha+\pi) = 2\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{6}$

$$\Rightarrow \alpha + \pi = \frac{5\pi}{6}\,(2\pi) \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{6}\,(2\pi)$$

**<u>Question II</u>**

**1)** $\left(\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}x^2}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \left(\sqrt{2}x\right)^{11-k}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}x^2}\right)^k$

$$= \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 2^{\frac{11-k}{2}} \cdot x^{11-k} \cdot (-1)^k \cdot 2^{-\frac{k}{2}} \cdot x^{-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 2^{\frac{11}{2}-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{11-3k}$$

**Condition** : $11 - 3k = -4 \Leftrightarrow -3k = -15 \Leftrightarrow k = 5$

Le terme en $\frac{1}{x^4}$ est : $C_{11}^5 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot (-1)^5 \cdot x^{-4} = -462\sqrt{2}\frac{1}{x^4}$.

**2)** Nombre de cas possibles $= 9! = 362880$

$A$ : grouper les livres de mathématiques ensemble

Pierre peut placer le groupe des livres de mathématiques aux places $1-4, 2-5, 3-6, 4-7,$ $5-8$ ou $6-9$, il a donc 6 possibilités de placer ce groupe.

Il y a $4!$ possibilités de placer les livres de mathématiques à l'intérieur de ce groupe.

Il y a $5!$ possibilités de ranger les livres de physique aux places restantes.

Nombre de cas favorables $= 6 \cdot 4! \cdot 5! = 17280$

$p(A) = \frac{6\cdot 4!\cdot 5!}{9!} = \frac{17280}{362880} = \frac{1}{21}$

**3) a)** nombre de groupes = nombre de groupes sans Carole, sans Nadine, sans Martine + nombre de groupes avec Carole, avec Nadine, avec Martine

$$= C_{17}^8 + C_{17}^5 = 24310 + 6188 = 30498$$

**b)** nombre de groupes = nombre de groupes sans Marc + nombre de groupes avec Marc, sans Claude, sans Tom

$$= C_{19}^8 + C_{17}^7 = 75582 + 19448 = 95030$$

**Alternative :**

nombre de groupes = nombre de groupes de 8 élèves choisis parmi 20 – (nombre de groupes avec Marc et Claude, sans Tom + nombre de groupes avec Marc et Tom, sans Claude + nombre de groupes avec Marc, Tom et Claude)

$$= C_{20}^8 - \left(C_{17}^6 + C_{17}^6 + C_{17}^5\right) = 125970 - (12376 + 12376 + 6188) = 125970 - 30940 = 95030$$

**4) a)** loi de probabilité de X :

$$p(X = 10) = \frac{C_k^2}{C_9^2} = \frac{\frac{k!}{2!\cdot(k-2)!}}{36} = \frac{k(k-1)}{72}$$

$$p(X = 2) = \frac{C_k^1 \cdot C_{9-k}^1}{C_9^2} = \frac{k(9-k)}{36}$$

$$p(X = -10) = \frac{C_{9-k}^2}{C_9^2} = \frac{\frac{(9-k)!}{2!\cdot(7-k)!}}{36} = \frac{(9-k)\,(8-k)}{72}$$

**b)** Le jeu est équilibré $\Leftrightarrow E(X) = 0$

$$\Leftrightarrow 10 \cdot \frac{k(k-1)}{72} + 2 \cdot \frac{k(9-k)}{36} - 10 \cdot \frac{(9-k)\,(8-k)}{72} = 0 \quad |\cdot 36$$

$$\Leftrightarrow 5k(k-1) + 2k(9-k) - 5(72 - 9k - 8k + k^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5k^2 - 5k + 18k - 2k^2 - 360 + 45k + 40k - 5k^2 = 0$$

$\Leftrightarrow -2k^2 + 98k - 360 = 0 \quad |:(-2)$

$\Leftrightarrow k^2 - 49k + 180 = 0$

$\Delta = 2401 - 720 = 1681$

$k = \frac{49+41}{2} = 45$ à écarter ou $k = \frac{49-41}{2} = 4$

Donc $k = 4$.

**Question III**

**1)** $C: y = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{3-x}$ $\quad$ **C.E.** $: 3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

$\Leftrightarrow y + 2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3-x} \ \mid (\quad)^2$

$\Leftrightarrow (y+2)^2 = \frac{1}{4} \cdot (3-x)$ et $y + 2 \leq 0$

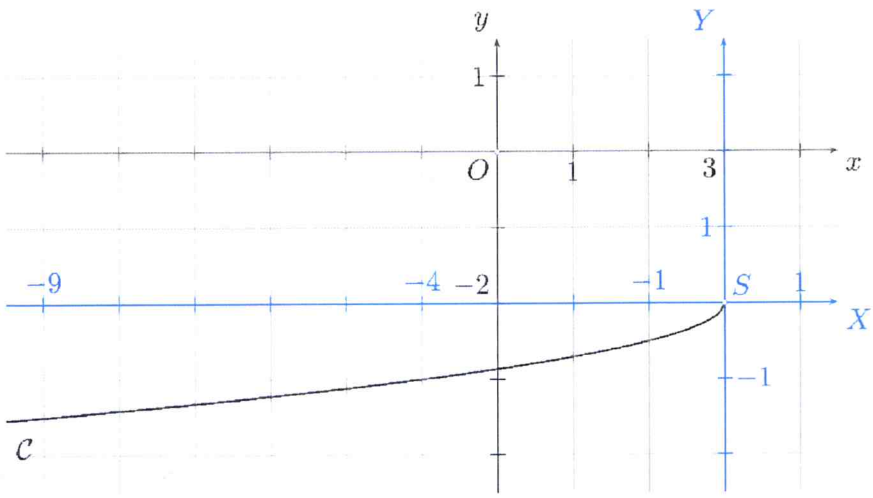
$\Leftrightarrow (y+2)^2 = -\frac{1}{4}(x-3)$ et $y \leq -2$

Posons : $\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow Y^2 = -\frac{1}{4}X$ et $Y \leq 0$

$C$ est une demi-parabole tournée vers la gauche de sommet $S(3,-2)$ et d'axe focal $(SX)$.

| $X$ | $0$ | $-1$ | $-4$ | $-9$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-\frac{3}{2}$ |




**2)** $\Gamma: 45x^2 - 5y^2 + 18 = 0$

$d: x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2y = x + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$

$t: y = mx + p$

$t \perp d \Leftrightarrow \frac{1}{2}m = -1 \Leftrightarrow m = -2$

$t: y = -2x + p$

$t \cap \Gamma: \begin{cases} y = -2x + p \ \ (1) \\ 45x^2 - 5y^2 + 18 = 0 \ \ (2) \end{cases}$

(1) dans (2): $45x^2 - 5(-2x+p)^2 + 18 = 0$

$\Leftrightarrow 45x^2 - 5(4x^2 - 4xp + p^2) + 18 = 0$

$\Leftrightarrow 45x^2 - 20x^2 + 20xp - 5p^2 + 18 = 0$

$\Leftrightarrow 25x^2 + 20xp - 5p^2 + 18 = 0$

$\Delta = 400p^2 - 100(-5p^2 + 18) = 400p^2 + 500p^2 - 1800 = 900p^2 - 1800$

$= 900(p^2 - 2)$

$t$ est tangente à $\Gamma \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow p^2 = 2 \Leftrightarrow p = \pm\sqrt{2}$

Tangentes : $t_1: y = -2x + \sqrt{2}$ et $t_2: y = -2x - \sqrt{2}$

<u>**Coordonnées des points de tangence :**</u>

$\boldsymbol{t_1 \cap \Gamma}$:

$\boldsymbol{p = \sqrt{2}}$: $25x^2 + 20\sqrt{2}x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(5x + 2\sqrt{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$

$\Rightarrow y = -2 \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) + \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{5\sqrt{2}}{5} = \frac{9\sqrt{2}}{5}$

$T_1\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{9\sqrt{2}}{5}\right)$

$\boldsymbol{t_2 \cap \Gamma}$:

$\boldsymbol{p = -\sqrt{2}}$: $25x^2 - 20\sqrt{2}x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(5x - 2\sqrt{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

$\Rightarrow y = -2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5} - \sqrt{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{5\sqrt{2}}{5} = -\frac{9\sqrt{2}}{5}$

$T_2\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}, -\frac{9\sqrt{2}}{5}\right)$

**3) a)** $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \Gamma$ est une ellipse.

Equation réduite de $\Gamma$ : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -1\right) \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{\frac{27}{4}}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$

$B\left(-\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right) \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{\frac{9}{4}}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1$

Posons : $\begin{cases} u = \frac{1}{a^2} > 0 \\ v = \frac{1}{b^2} > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{27}{4}u + v = 1 \ \ |\cdot 4 \\ \frac{9}{4}u + 3v = 1 \ \ |\cdot \frac{4}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 27u + 4v = 4 \ \ (1) \\ 3u + 4v = \frac{4}{3} \ \ (2) \end{cases}$

$(1) - (2)$: $24u = \frac{8}{3} \Leftrightarrow u = \frac{1}{9}$

D'où : $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3\ (a > 0)$

Dans $(1): 3 + 4v = 4 \Leftrightarrow 4v = 1 \Leftrightarrow v = \frac{1}{4}$

D'où : $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = 2\ (b > 0)$

Equation réduite de $\Gamma$ : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

**b)** Comme $a > b$ , l'axe focal est l'axe des *x*.

$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

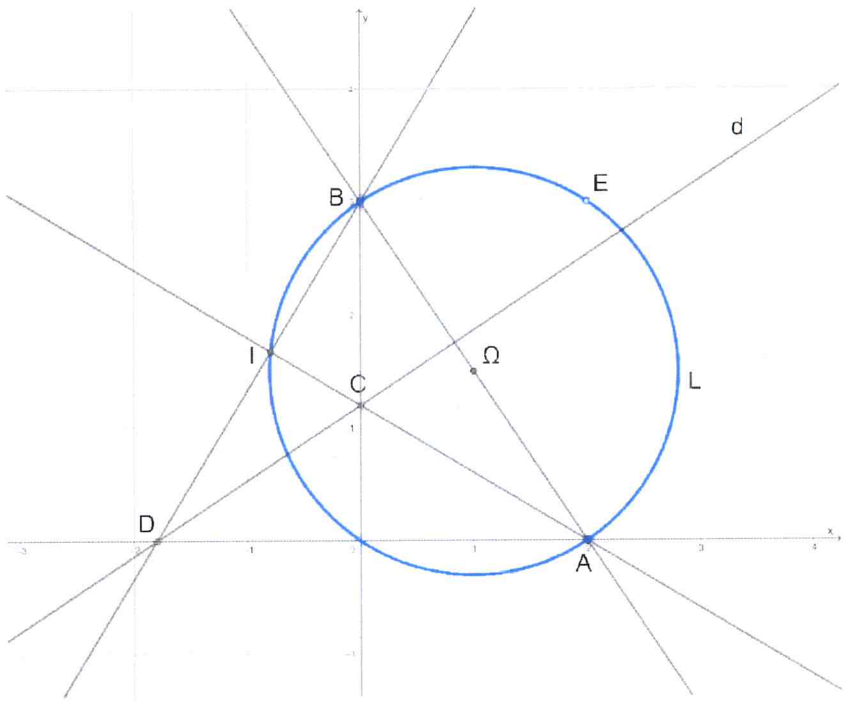
Foyers : $F_1(\sqrt{5}, 0), F_2(-\sqrt{5}, 0)$

Excentricité : $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

**Question IV**

$O(0,0), A(2,0), B(0,3), C(0,\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

$L = \{I \in \Pi / I \in (AC) \cap (BD)\}$




$\cdot\ M(x,y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{CM}(x, y - \lambda),\ \overrightarrow{AB}(-2,3)$

$\Leftrightarrow -2x + 3y - 3\lambda = 0$ équation cartésienne de *d*

$\cdot\ \{D\} = (OA) \cap d$

$(OA): y = 0$

$$\begin{cases} y = 0 & (1) \\ -2x + 3y - 3\lambda = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1)$ dans $(2): -2x - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 2x = -3\lambda \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}\lambda$

$D\left(-\frac{3}{2}\lambda, 0\right)$

· $M(x,y) \in (AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. $\overrightarrow{AM}(x-2,y), \overrightarrow{AC}(-2,\lambda)$

$\Leftrightarrow \lambda x + 2y - 2\lambda = 0$ équation cartésienne de $(AC)$.

· $M(x,y) \in (BD) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires. $\overrightarrow{BM}(x,y-3), \overrightarrow{BD}\left(-\frac{3}{2}\lambda,-3\right)$

$$\Leftrightarrow -3x + \frac{3}{2}\lambda y - \frac{9}{2}\lambda = 0 \quad \Big| \cdot \frac{2}{3}$$

$\Leftrightarrow -2x + \lambda y - 3\lambda = 0$ équation cartésienne de $(BD)$

$$L: \begin{cases} \lambda x + 2y - 2\lambda = 0 \\ -2x + \lambda y - 3\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(x-2) = -2y & (1) \\ \lambda(y-3) = 2x & (2) \end{cases}$$

· **Si $x \neq 2$:**

$(1) \Rightarrow \lambda = \frac{-2y}{x-2} = \frac{2y}{2-x}$

Dans $(2)$: $\frac{2x}{2-x} \cdot (y-3) = 2x \quad |\cdot (2-x)$

$$\Leftrightarrow 2y(y-3) = 2x(2-x)$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 6y = 4x - 2x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2y^2 - 6y = 0 \quad |:2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = 1 + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

C'est l'équation d'un cercle $C$ de centre $\Omega\left(1,\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

· **Si $x = 2$ et $y \neq 3$:** Le système devient :

$$\begin{cases} 2\lambda + 2y - 2\lambda = 0 \\ -4 + \lambda y - 3\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -4 - 3\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \lambda = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Le point $A(2,0)$ est un point particulier du lieu obtenu pour $\lambda = -\frac{4}{3}$.

$A \in C$, car $1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$.

· **Si $x = 2$ et $y = 3$:**

Alors $\begin{cases} 0\lambda = -6 \\ 0\lambda = 4 \end{cases}$ est impossible. Donc $E(2,3)$ est un point parasite du lieu.

$E(2,3) \in C$, car $1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$, mais $E \notin L$.

Donc $L = C\left(\Omega\left(1,\frac{3}{2}\right),\frac{\sqrt{13}}{2}\right) \setminus \{E(2,3)\}$.