EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES **Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT**					
Date :	**20.09.23**	*Durée :*	**08:15 - 11:15**	*Numéro candidat :*	
Discipline :	**Mathématiques**	*Section(s) :*	**CB / CB-4LANG**		

Question I (10+4 = **14 points**)

1) Soit $P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 7 - 9i$ avec α et β complexes.
   a) Déterminer α et β sachant que $-1 + i$ est une racine de P et que le reste de la division de $P(z)$ par $z + 2$ est $-17 - 19i$.
   b) Résoudre ensuite l'équation $P(z) = 0$ en remplaçant α et β par les valeurs trouvées dans **a)**.
   c) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé soient les points *A*, *B* et *C* dont les affixes sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$. Déterminer la nature du triangle *ABC*. Justifier la réponse.
2) Soient λ et α des nombres réels. Dans le plan de Gauss, on donne les points $A\left(-\sqrt{3} - i\right)$ et $B\left(4\sqrt{2}\right)$. Soit *h* une homothétie de centre *O* et de rapport λ et *r* une rotation de centre *O* et d'angle α. Déterminer toutes les possibilités pour λ et α telles que $(h \circ r)(A) = B$.

Question II (3+2+4+7 = **16 points**)

1) Calculer le terme en $\frac{1}{x^4}$ provenant du développement de $\left(\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}\,x^2}\right)^{11}$.
2) Pierre possède 4 livres de mathématiques différents et 5 livres de physique différents. Il les range au hasard en ligne sur une étagère de sa bibliothèque.
   Calculer la probabilité que les livres de mathématiques soient groupés ensemble.
3) De combien de manières peut-on choisir un groupe de 8 élèves parmi les 20 élèves d'une classe pour fêter les résultats d'un examen si :
   a) Carole, Nadine et Martine n'acceptent de participer que si elles sont ensemble ?
   b) Marc refuse de participer si Claude ou Tom participent ?
4) Un jeu consiste à gratter exactement 2 cases sur des billets de loterie ayant chacun 9 cases. Sur chaque billet il y a exactement *k* cases ($2 \leq k \leq 7$) derrière lesquelles se cache l'image d'un cœur. Si le joueur gratte 2 cœurs, il gagne 10 €. Si le joueur gratte exactement 1 cœur, il gagne 2 €. Si le joueur ne gratte aucun cœur, il perd 10 €. Soit X la variable aléatoire qui représente le gain du joueur.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Déterminer *k* pour que le jeu soit équilibré.

Question III (5+5+5 = **15 points**)

1) Identifier la courbe C : $y = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{3-x}$ et tracer-la dans un repère orthonormé du plan (unité : 1 cm).
2) Soit la conique Γ d'équation $45x^2 - 5y^2 + 18 = 0$ dans un repère orthonormé. Déterminer une équation des tangentes à Γ perpendiculaires à la droite *d* d'équation $x - 2y + 2 = 0$. Déterminer les coordonnées des points de tangence.
3) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a) Déterminer la nature et l'équation réduite d'une conique Γ de centre *O* passant par les points $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -1\right)$ et $B\left(-\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$ et dont l'excentricité est strictement comprise entre 0 et 1.
   b) Déterminer les coordonnées des foyers de Γ et l'excentricité de Γ.

Question IV (**15 points**)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan d'unité graphique 1 cm, on considère les points $A(2,0)$ et $B(0,3)$. Soit *d* une droite variable perpendiculaire à la droite (AB). Cette droite *d* coupe (OB) en *C* et (OA) en *D*. Déterminer et construire le lieu L du point d'intersection de (AC) et de (BD).

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$		
$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$	$\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$	
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$	$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$	
$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$	$\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$	
$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$		$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$		
$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$		$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$		
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$	
$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$	$\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$		$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$
$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$		$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$
$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$		
$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$		$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$
$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$		
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$		
$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$		
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$		