EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES			
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT			
Date :	22.09.23	*Durée :*	08:15 - 10:00
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Structures	*Section(s) :*	CC / CC-4LANG

I. Soit bi $(b \in \mathbb{R})$ une racine imaginaire pure de P. (0,5)

$$P(bi) = 0 \Leftrightarrow (bi)^3 + (1-10i)(bi)^2 - (29+5i)(bi) + 6(1+5i) = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^3 i - b^2 + 10b^2 i - 29bi + 5b + 6 + 30i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^3 + 10b^2 - 29b + 30 = 0 & (pi) \\ -b^2 + 5b + 6 = 0 & (pr) \end{cases}$$

$(pr) \underset{\Delta = 49}{\Leftrightarrow} b = -1 \vee b = 6.$

Dans (pi): $-(-1)^3 + 10 \cdot (-1)^2 - 29 \cdot (-1) + 30 = 70 \neq 0$ et

$$-6^3 + 10 \cdot 6^2 - 29 \cdot 6 + 30 \overset{!}{=} 0.$$

$z_0 = 6i.$ (4)

Schéma de Horner :

	1	$1-10i$	$-29-5i$	$6+30i$
$6i$		$6i$	$24+6i$	$-6-30i$
	1	$1-4i$	$-5+i$	0

$P(z) = (z-6i) \cdot \left[z^2 + (1-4i)z - (5-i)\right]$ (2)

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 6i \vee z^2 + (1-4i)z - (5-i) = 0.$

$\Delta = (1-4i)^2 + 4 \cdot (5-i) = 5 - 12i.$ (1)

Soit $\delta = x + iy$ $(x,y \in \mathbb{R})$ une racine carrée complexe de $5-12i$.

Alors $\begin{cases} x^2 + y^2 = |5-12i| = 13 & (1) \\ x^2 - y^2 = 5 & (2) \\ 2xy = -12 < 0 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow x = \pm 3;$

$(1) - (2) \Rightarrow y = \pm 2;$

de (3), x et y ont des signes contraires.

$\delta = \pm (3-2i).$ (3)

Les solutions du trinôme du second degré sont $\frac{-1+4i \pm (3-2i)}{2} = \begin{cases} 1+i \\ -2+3i \end{cases}$ (1)

$S = \{6i; 1+i; -2+3i\}$ (0,5)

II.

1)

- $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$

  $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

  $= 2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

- $|2-2i| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

  $2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

  $= 2\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

- $i = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

- Donc :

$$\begin{aligned}
z &= \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\left[2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^{20}}{\left[2\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10}}\\
&= \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{2^{20}\text{cis}\left(-\frac{20\pi}{3}\right)}{2^{10}\cdot 2^{5}\text{cis}\left(-\frac{10\pi}{4}\right)}\\
&= 2^{5}\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{20\pi}{3}+\frac{5\pi}{2}\right)\\
&= 32\text{cis}\left(-\frac{11\pi}{3}\right)\\
&= 32\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 32\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= 16+16i\sqrt{3} \qquad f.a.\text{ de } z
\end{aligned}$$

(5)

2) Les racines cinquièmes de z sont :

$$\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[5]{32}\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}\right)\\
&= 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{15}+k\cdot\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{avec } k\in\{0;1;2;3;4\}
\end{aligned}$$

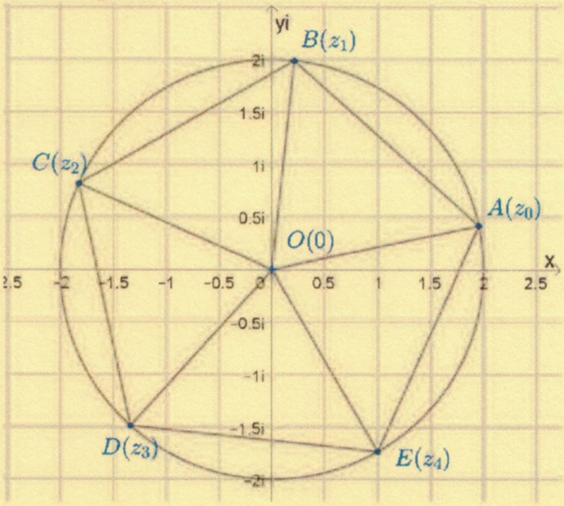
$z_0 = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{15}\right)$

$z_1 = 2\text{cis}\left(\frac{7\pi}{15}\right)$

$z_2 = 2\text{cis}\left(\frac{13\pi}{15}\right)$

$z_3 = 2\text{cis}\left(\frac{19\pi}{15}\right) = 2\text{cis}\left(-\frac{11\pi}{15}\right)$

$z_4 = 2\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{15}\right) = 2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (2)



(1)

III.

1)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & (m-3) \\ 1 & (2-m) & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & (2-m) \end{matrix}$$

$$= -4 - m + 3 + 2 - m - 1 - 2\cdot(2-m)(m-3) - 2$$

$$= 2m^2 - 12\mathrm{m} + 10$$

$$= 2(m^2 - 6\mathrm{m} + 5)$$

$$= 2(m-1)(m-5)$$

$\det A = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = 5$

Le système admet une solution unique si et seulement si $m \in \mathbb{R}\backslash\{1;5\}$. (3)

2)

- Si $m = 1$, $\det A = 0$ et le système n'admet pas de solution unique.

$$(s) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + y - 2z = 3 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)/\,(1)-2\cdot(2)} \quad \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ \quad - 3y + 5z = -7 \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé.

Posons $y = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

De (2) : $z = \frac{3}{5}\alpha - \frac{7}{5}$.

Dans (1) : $2x = \alpha - \frac{3}{5}\alpha + \frac{7}{5} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{5}$.

$S = \left\{\left(\frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{5}; \alpha; \frac{3}{5}\alpha - \frac{7}{5}\right) / \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

($S = \{(\alpha; 5\alpha - 1; 3\alpha - 2) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$S = \left\{\left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\alpha + \frac{7}{3}; \alpha\right) / \alpha \in \mathbb{R}\right\}$)

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace se coupant suivant une droite passant par le point $A\left(\frac{1}{5}; 0; -\frac{7}{5}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. (5)

- Si $m = 5$, $\det A = 0$ et le système n'admet pas de solution unique.

$$(s) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{(2)/\,(1)-2\cdot(2) \\ (3)/\,(1)-2\cdot(3)}} \quad \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ \quad - 3y - 3z = -7 \\ \quad 5y + 5z = -7 \end{cases}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(3)/\,5\cdot(2)+3\cdot(3)} \quad \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ \quad - 3y - 3z = -7 \\ \quad 0 = -56 \end{cases}$$

La dernière équation étant impossible, le système est impossible.

$S = \emptyset$

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace n'ayant aucun point en commun. (4)

IV.

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-10\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \, / \, \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \, / \begin{cases} -2 = k \cdot 1 \\ -2 = k \cdot (-1) \\ -10 = k \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \, / \begin{cases} k = -2 \\ k = 2 \\ k = 10 \end{cases} \text{ impossible}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; les points A, B et C ne sont pas alignés. (1)

$$\begin{aligned} M(x\,;y\,;z) \in \pi \quad &\Leftrightarrow \quad det\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y+2 & -1 & -2 \\ z-3 & -1 & -10 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-1 & 1 \\ y+2 & -1 \\ z-3 & -1 \end{matrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 10(x-1) - 2(z-3) + 2(y+2) \\ &\qquad -2(z-3) - 2(x-1) + 10(y+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 8(x-1) + 12(y+2) - 4(z-3) = 0 \,|:4 \\ &\Leftrightarrow \quad 2(x-1) + 3(y+2) - (z-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x + 3y - z + 7 = 0 \end{aligned}$$

$\pi \equiv 2x + 3y - z + 7 = 0$ (équation cartésienne de π) (3)

2) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à π, donc un vecteur directeur de d.

Un système d'équations paramétriques de d est donc :

$$d \equiv \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 3\alpha - 2 \\ z = -\alpha + 3 \end{cases} \text{avec } (\alpha \in \mathbb{R})$$ (2)

3) Les plans π et π' sont parallèles, donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal à π'.

$$\begin{aligned} M(x\,;y\,;z) \in \pi' &\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) \cdot 2 + (y-5) \cdot 3 + (z+4) \cdot (-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 3y - z - 21 = 0 \end{aligned}$$

$\pi' \equiv 2x + 3y - z - 21 = 0$ (2)

4)

$$M(x\,;y\,;z) \in d \cap \pi' \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 3\alpha - 2 \\ z = -\alpha + 3 \\ 2x + 3y - z - 21 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 3\alpha - 2 \\ z = -\alpha + 3 \\ 4\alpha + 2 + 9\alpha - 6 + \alpha - 3 - 21 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 3\alpha - 2 \\ z = -\alpha + 3 \\ 14\alpha = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

d perce le plan π' au point $I(5;4;1)$. (2)

V.

1)

$$3x^2 \cdot \left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{10} = 3x^2 \cdot \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} \cdot (-1)^k \cdot (x^3)^{10-k} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} \cdot 3x^2 \cdot (-1)^k \cdot x^{30-3k} \cdot 2^k \cdot x^{-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{10} 3 \cdot C_{10}^{k} \cdot (-1)^k \cdot 2^k \cdot x^{32-5k}$$

$$x^{32-5k} = x^7 \Leftrightarrow 32 - 5k = 7$$

$$\Leftrightarrow 5k = 25$$

$$\Leftrightarrow k = 5$$

Terme en x^7 :

$$3 \cdot C_{10}^{5}(-1)^5 \cdot 2^5 \cdot x^{32-5\cdot 5} = 3 \cdot 252 \cdot (-1) \cdot 32 \cdot x^7$$

$$= -24192x^7$$

(5)

2) Dans l'armoire se trouvent 20 chaussures. L'ordre importe.

a) Il y a

$$\underbrace{A_{10}^{1}}_{\substack{\text{Nombre de choix}\\ \text{d'une chaussure}\\ \text{droite parmi 10}}} \cdot \underbrace{A_{10}^{1}}_{\substack{\text{Nombre de choix}\\ \text{d'une chaussure}\\ \text{gauche parmi 10}}} + \underbrace{A_{10}^{1}}_{\substack{\text{Nombre de choix}\\ \text{d'une chaussure}\\ \text{gauche parmi 10}}} \cdot \underbrace{A_{10}^{1}}_{\substack{\text{Nombre de choix}\\ \text{d'une chaussure}\\ \text{droite parmi 10}}}$$

$= 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 200$ choix amenant une chaussure gauche et une chaussure droite. (1)

b) Il y a

$2 \cdot \left(A_5^1 \cdot A_5^1 + A_3^1 \cdot A_3^1 + A_2^1 \cdot A_2^1\right) = 2 \cdot (5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2) = 76$ choix amenant une chaussure gauche et une chaussure droite de même couleur. (2)

c) Il y a 20 choix qui amènent deux chaussures de la même paire. Puisqu'il y a $A_{20}^2 = 380$ choix possibles, il reste $380 - 20 = 360$ choix amenant deux chaussures qui ne sont pas de la même paire.

ou bien

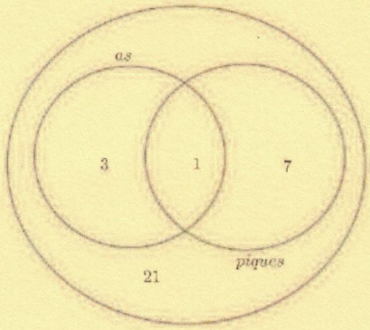
Il y a 20 choix possibles pour tirer une première chaussure. Parmi les 19 chaussures restantes, il y a une chaussure de la même paire que la première chaussure tirée et 18 chaussures d'une autre paire. Il y a donc $20 \cdot 18 = 360$ choix amenant deux chaussures qui ne sont pas de la même paire. (2)

3) L'ordre n'importe pas. Il y a $C_{32}^5 = 201.376$ mains possibles.

a) Arranger les 4 couleurs 1 à 1, combiner les 8 cartes à couleur choisies 3 à 3 et les 24 cartes restantes 2 à 2. Il y a $A_4^1 \cdot C_8^3 \cdot C_{24}^2 = 4 \cdot 56 \cdot 276 = 61.824$ mains contenant exactement trois cartes de la même couleur.

$P(\text{"3 cartes de la même couleur"}) = \frac{61.824}{201.376} = \frac{276}{899} \approx 30{,}70\%$ (2)

b)



Choisir l'as de pique, combiner 7 cartes piques restantes 2 à 2 et les 21 cartes restantes 2 à 2 ou bien

combiner 3 as (non pique) 1 à 1, combiner 7 cartes piques (non as) 3 à 3 et les 21 cartes restantes 1 à 1.

Il y a $C_1^1 \cdot C_7^2 \cdot C_{21}^2 + C_3^1 \cdot C_7^3 \cdot C_{21}^1$
$= 1 \cdot 21 \cdot 210 + 3 \cdot 35 \cdot 21 = 6.615$ mains contenant exactement un as et trois piques.

$P(\text{"1 as et 3 piques"}) = \frac{6.615}{201.376} = \frac{945}{28.768} \approx 3{,}28\%$ (3)

c) Combiner 4 as 2 à 2, 4 rois 2 à 2 et les 24 cartes restantes 1 à 1
ou bien
combiner 4 as 3 à 3 et 4 rois 2 à 2
ou bien
combiner 4 as 2 à 2 et 4 rois 3 à 3.

Il y a $C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{24}^1 + C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot C_{24}^0 + C_4^2 \cdot C_4^3 \cdot C_{24}^0 = 6 \cdot 6 \cdot 24 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 912$ mains contenant au moins deux as et au moins deux rois.

$P(\text{"au moins 2 as et au moins 2 rois"}) = \frac{912}{201.376} = \frac{57}{12.586} \approx 0{,}45\%$ (3)