EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES **Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT**			
Date :	20.09.23	*Durée :*	08:15 - 11:00
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse	*Section(s) :*	CC / CC-4LANG

MATHÉMATIQUES II - Correction

Question 1 (4 points)

Voir EM66 pages 86-87

Question 2 (4 + 6 = 10 points)

1) $6 \cdot (3^x + 3^{-x}) - 7 = 3^{-x+2}$ $\qquad D = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 6 \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{-x} - 7 = 9 \cdot 3^{-x}$

$\Leftrightarrow 6 \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{-x} - 7 - 9 \cdot 3^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow 6 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^{-x} - 7 = 0 \qquad | \cdot 3^x$

$\Leftrightarrow 6 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 3 = 0 \qquad$ Posons : $y = 3^x > 0$

$\Leftrightarrow 6y^2 - 7y - 3 = 0 \qquad \left[\Delta = 121 > 0, y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = -\frac{1}{3}\right]$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$ ou $y = -\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{3}{2}$ ou $\underbrace{3^x = -\frac{1}{3}}_{\text{impossible, car } 3^x > 0}$

$\Leftrightarrow x = \log_3 \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 - \log_3 2 \qquad S = \{1 - \log_3 2\}$

2) $\log_{\sqrt{2}}(2x+3) - \log_2(6-x) \geqslant 1 - \log_{\frac{1}{2}}(1+2x)$

C.E. : (1) $2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$ $\qquad$ (2) $6 - x > 0 \Leftrightarrow x < 6$ $\qquad$ (3) $1 + 2x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

$D = \left]-\frac{1}{2}; 6\right[$

$$\frac{\ln(2x+3)}{\ln\sqrt{2}} - \frac{\ln(6-x)}{\ln 2} \geqslant 1 - \frac{\ln(1+2x)}{\ln\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2x+3)}{\frac{1}{2}\ln 2} - \frac{\ln(6-x)}{\ln 2} \geqslant 1 - \frac{\ln(1+2x)}{-\ln 2} \qquad | \cdot \ln 2 > 0$$

$\Leftrightarrow 2\ln(2x+3)-\ln(6-x) \geqslant \ln 2+\ln(1+2x)$

$\Leftrightarrow \ln(2x+3)^2 \geqslant \ln 2+\ln(1+2x)+\ln(6-x)$

$\Leftrightarrow \ln(2x+3)^2 \geqslant \ln[2(1+2x)(6-x)]$

$\Leftrightarrow 4x^2+12x+9 \geqslant 12-2x+24x-4x^2$

$\Leftrightarrow 8x^2-10x-3 \geqslant 0$ $\quad\left[\Delta = 196>0, x_1=-\frac{1}{4}, x_2=\frac{3}{2}\right]$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$8x^2-10x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{2};6\right[$

Question 3 (3 + 4 + 4 + 3 + 5 = 19 points)

$f(x)=x(x-3)e^{1-\frac{x}{2}}$

1) $dom\ f=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{x(x-3)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{1-\frac{x}{2}}}_{\to+\infty}=+\infty$$ pas d'A.H.G.

A.O.G. ?

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x-3)e^{1-\frac{x}{2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{(x-3)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{1-\frac{x}{2}}}_{\to+\infty}=-\infty$$ pas d'A.O.G.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x(x-3)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{1-\frac{x}{2}}}_{\to 0}\text{ f.i.}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{x(x-3)}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^{-1+\frac{x}{2}}}_{\to+\infty}}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{\frac{1}{2}e^{-1+\frac{x}{2}}}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\underbrace{\frac{1}{4}e^{-1+\frac{x}{2}}}_{\to+\infty}}$$

$$=0$$ A.H.D.: $y=0$

2) $dom\ f' = dom\ f$

$$f'(x) = (2x-3)e^{1-\frac{x}{2}} + (x^2-3x)e^{1-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}(-4x+6+x^2-3x)$$
$$= -\frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}(x^2-7x+6)$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0$ $[\Delta = 25 > 0, x_1 = 1, x_2 = 6]$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 6$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2\sqrt{e}$	↗	$\frac{18}{e^2}$	↘	0

Minimum : $f(1) = -2\sqrt{e}$ $m(1; -2\sqrt{e})$

Maximum : $f(6) = \frac{18}{e^2}$ $M\left(6; \frac{18}{e^2}\right)$

3) $dom\ f'' = dom\ f'$

$$f''(x) = \frac{1}{4}e^{1-\frac{x}{2}}(x^2-7x+6) - \frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}(2x-7)$$
$$= \frac{1}{4}e^{1-\frac{x}{2}}(x^2-7x+6-4x+14)$$
$$= \frac{1}{4}e^{1-\frac{x}{2}}(x^2-11x+20)$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-11x+20=0$ $\left[\Delta = 41 > 0, x_1 = \frac{11+\sqrt{41}}{2}, x_2 = \frac{11-\sqrt{41}}{2}\right]$

$\Leftrightarrow x = \frac{11+\sqrt{41}}{2}$ ou $x = \frac{11-\sqrt{41}}{2}$

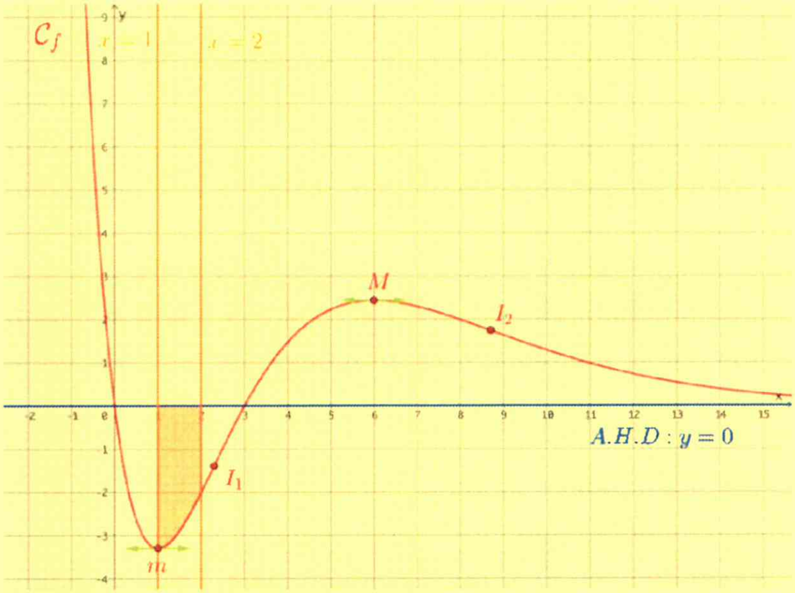
Tableau de concavité :

x	$-\infty$		$\frac{11-\sqrt{41}}{2}$		$\frac{11+\sqrt{41}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
C_f		$\smile$	$P.I.$	$\frown$	$P.I.$	$\smile$	

Points d’inflexion : $f\left(\frac{11-\sqrt{41}}{2}\right) \approx -1,39$ $\quad$ $I_1\,(\approx 2,30; \approx -1,39)$

$f\left(\frac{11+\sqrt{41}}{2}\right) \approx 1,74$ $\quad$ $I_2\,(\approx 8,7; \approx 1,74)$

4) Représentation graphique :



5) Aire :

$$A = -\int_1^2 (x^2-3x)e^{1-\frac{x}{2}}\,dx \qquad f(x) = x^2-3x \qquad g'(x) = e^{1-\frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = 2x-3 \qquad g(x) = -2e^{1-\frac{x}{2}}$$

$$\overset{IPP}{=} \left[2(x^2-3x)e^{1-\frac{x}{2}}\right]_1^2 + \int_1^2 (-4x+6)e^{1-\frac{x}{2}}\,dx$$

$$f(x) = -4x+6 \qquad g'(x) = e^{1-\frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = -4 \qquad g(x) = -2e^{1-\frac{x}{2}}$$

$$\overset{IPP}{=} -4+4\sqrt{e}+\left[-2(-4x+6)e^{1-\frac{x}{2}}\right]_1^2 - \int_1^2 8e^{1-\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= -4+4\sqrt{e}+4+4\sqrt{e}+\left[16e^{1-\frac{x}{2}}\right]_1^2$$

$$= 8\sqrt{e}+16-16\sqrt{e}$$

$$= 16-8\sqrt{e}$$

$$= 8(2-\sqrt{e}) \approx 2,81 \text{ u.a.}$$

Question 4 (6 + 3 = 9 points)

$f(x) = x + 2 - \ln \frac{2x}{x+1}$

1) C.E. (1) $\frac{2x}{x+1} > 0$ (2) $x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x}{x+1}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$dom\ f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\underbrace{x+2}_{\to\pm\infty} - \ln \underbrace{\frac{2x}{x+1}}_{\to \ln 2 (*)} \right) = \pm\infty$$ pas d'A.H.G.

$$(*) \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x+1} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

A.O. ?

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + 2 - \ln \frac{2x}{x+1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \ln \underbrace{\frac{2x}{x+1}}_{\to \ln 2} \right)$$

$$= 1 \ (= a)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2 - \ln \underbrace{\frac{2x}{x+1}}_{\to \ln 2} \right) = 2 - \ln 2$$

Donc : A.O.: $y = x + 2 - \ln 2$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \left(\underbrace{x+2}_{\to 1} - \ln \underbrace{\overbrace{\frac{2x}{x+1}}^{\to+\infty}}_{\to+\infty} \right) = -\infty$$ A.V.: $x = -1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\underbrace{x+2}_{\to 2} - \underbrace{\ln \overbrace{\frac{2x}{x+1}}^{\to 0^+}}_{\to-\infty} \right) = +\infty$$ A.V.: $x = 0$

2) $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[: \varphi(x) = f(x) - (x+2-\ln 2) = -\ln\dfrac{2x}{x+1} + \ln 2$

Résolvons : $-\ln\dfrac{2x}{x+1} + \ln 2 > 0 \Leftrightarrow \ln\dfrac{2x}{x+1} < \ln 2 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x > -1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	$\|\|$		$\|\|$	$+$	
Position		$A.O./\mathcal{C}_f$	$\|\|$		$\|\|$	$\mathcal{C}_f/A.O.$	

Question 5 (3 + 3 = 6 points)

1) $$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{1-2x} = \lim_{h\to0^+}(1+h)^{1+\frac{6}{h}} = \lim_{h\to0^+}\left[(1+h)^{\frac{6}{h}}\cdot(1+h)\right] = e^6$$

Posons : $h = -\dfrac{3}{x} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{h}$

Si $x \to -\infty$, alors $h \to 0^+$

2) $$\begin{aligned}\int \tan x(1+\sin 2x)\,dx &= \int (\tan x + 2\sin x\cos x\tan x)\,dx\\ &= \int\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 2\sin^2 x\right)dx\\ &= \int\left(-\frac{-\sin x}{\cos x} + 1 - \frac{1}{2}\cdot\cos 2x\cdot 2\right)dx\\ &= -\ln|\cos x| + x - \frac{1}{2}\sin 2x + c \ (c\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

Question 6 (3 + 4 = 7 points)

1) $f(x) = \dfrac{5x^2-7x-7}{(x^2+9)(2x-1)}$ $\qquad$ $dom\ f = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$$\frac{5x^2-7x-7}{(x^2+9)(2x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+9} + \frac{c}{2x-1} \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2-7x-7}{(x^2+9)(2x-1)} = \frac{(ax+b)(2x-1)+c(x^2+9)}{(x^2+9)(2x-1)} \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-7x-7 = 2ax^2 - ax + 2bx - b + cx^2 + 9c \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-7x-7 = (2a+c)x^2 + (-a+2b)x - b + 9c \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a+c=5\\-a+2b=-7\\-b+9c=-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=5-2a\\a=2b+7\\-b-18a=-52\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=5-2a\\a=2b+7\\-37b=74\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-1\\a=3\\b=-2\end{cases}$$

Donc : $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^2+9} - \dfrac{1}{2x-1}$

2) $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x-1}$

$F(x) = \frac{3}{2} \ln|x^2+9| - \frac{2}{3} \text{Arc}\tan\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2} \ln|2x-1| + c \ (c \in \mathbb{R})$

$F(0) = \ln 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \ln 9 - 0 - \frac{1}{2} \ln 1 + c = \ln 3$

$\Leftrightarrow 3 \ln 3 + c = \ln 3$

$\Leftrightarrow c = -2 \ln 3$

Donc : $F(x) = \frac{3}{2} \ln(x^2+9) - \frac{2}{3} \text{Arc}\tan\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2} \ln|2x-1| - 2 \ln 3$

Question 7 (5 points)

Volume :

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-2}^{0} \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx \\
&= \pi \int_{-2}^{0} \left[(2^{-x}-6)^2 - \left(-\frac{3}{2}x-5\right)^2\right] dx \\
&= \pi \int_{-2}^{0} \left(2^{-2x} - 12 \cdot 2^{-x} + 36 - \frac{9}{4}x^2 - 15x - 25\right) dx \\
&= \pi \int_{-2}^{0} \left(2^{-2x} - 12 \cdot 2^{-x} - \frac{9}{4}x^2 - 15x + 11\right) dx \\
&= \pi \left[\frac{2^{-2x}}{-2\ln 2} + 12 \cdot \frac{2^{-x}}{\ln 2} - \frac{3}{4}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 11x\right]_{-2}^{0} \\
&= \pi \left[\left(\frac{1}{-2\ln 2} + \frac{12}{\ln 2} - 0 - 0 + 0\right) - \left(\frac{2^4}{-2\ln 2} + 12 \cdot \frac{2^2}{\ln 2} + 6 - 30 - 22\right)\right] \\
&= \pi \left(\frac{1}{-2\ln 2} + \frac{12}{\ln 2} + \frac{8}{\ln 2} - \frac{48}{\ln 2} + 46\right) \\
&= \pi \left(46 - \frac{56}{2\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2}\right) \\
&= \pi \left(46 - \frac{57}{2\ln 2}\right) \approx 15,34 \text{ u.v.}
\end{aligned}$$
