EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES			
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT			
Date :	22.09.23	*Durée :*	08:15 - 10:00
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Structures	*Section(s) :*	CD / CD-4LANG

Question 1 (12 points)

$P(z) = z^3 + (1+2i)z^2 - (1-10i)z - 3\cdot(7+4i)$

Soit bi la racine imaginaire pure de P, avec $b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P(bi) = 0 &\iff (bi)^3 + (1+2i)(bi)^2 - (1-10i)bi - 21 - 12i = 0 \\ &\iff -b^3 i - b^2 - 2b^2 i - bi - 10b - 21 - 12i = 0 \\ &\iff \left(-b^2 - 10b - 21\right) + \left(-b^3 - 2b^2 - b - 12\right) i = 0 \\ &\iff \begin{cases} -b^2 - 10b - 21 = 0 & (1) \\ -b^3 - 2b^2 - b - 12 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Résolvons (1) : $\Delta = (-10)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-21) = 100 - 84 = 16$

$b = \dfrac{10 \pm 4}{-2} \iff b = -7$ ou $b = -3$

$b = -3$ est aussi une solution de (2), car $-(-3)^3 - 2\cdot(-3)^2 - (-3) - 12 = 0$.

Par conséquent $z = -3i$ est une racine imaginaire pure de P.

Division par $z + 3i$:

	1	$1+2i$	$-1+10i$	$-21-12i$
$-3i$		$-3i$	$-3-3i$	$21+12i$
	1	$1-i$	$-4+7i$ ‖	0

D'où $P(z) = (z+3i)\left(z^2 + (1-i)z - 4 + 7i\right) = (z+3i)\cdot Q(z)$

$$\begin{aligned} Q(z) = 0 \iff z^2 + (1-i)z - 4 + 7i &= 0 \\ \Delta &= (1-i)^2 - 4\cdot(-4+7i) \\ &= 1 - 2i - 1 + 16 - 28i \\ &= 16 - 30i \end{aligned}$$

Soit $x + iy$ une racine carrée complexe de $16 - 30i$ avec $x; y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 & (1) \\ 2xy = -30 & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{16^2 + (-30)^2} = 34 & (3) \end{cases}$$

$(3) + (1) : 2x^2 = 50 \iff x = 5$ ou $x = -5$

$(3) - (1) : 2y^2 = 18 \iff y = 3$ ou $y = -3$

De (2) on sait que x et y sont de signes contraires, ainsi les racines carrées complexes de $16 - 30i$ sont $5 - 3i$ et $-5 + 3i$.

Les racines de Q sont : $z_1 = \dfrac{-(1-i) + 5 - 3i}{2} = 2 - i$ et $z_2 = \dfrac{-(1-i) - 5 + 3i}{2} = -3 + 2i$.

Finalement $\mathcal{S} = \{-3i; 2 - i; -3 + 2i\}$

Question 2

((4+4)+10=18 points)

1. a) Écrivons $z_1 = -4\sqrt{3} + 4i$ sous forme trigonométrique :

$|z_1| = \sqrt{\left(-4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = 8$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\varphi_1) = \dfrac{-4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi_1) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc $z_1 = 8\text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Écrivons $z_2 = -\sqrt{2}i\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ sous forme trigonométrique :

$$z_2 = -\sqrt{2}i\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{-\pi}{2}\right)\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

b) On en déduit :

$$\begin{aligned} Z = \frac{\overline{z_1}}{(z_2)^2} &= \frac{\overline{8\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}{\left(\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)^2} \\ &= \frac{8\text{cis}\left(\frac{-5\pi}{6}\right)}{2\text{cis}\left(\frac{-2\pi}{4}\right)} \\ &= 4\text{cis}\left(\frac{-5\pi}{6} - \frac{-2\pi}{4}\right) \\ &= 4\text{cis}\left(\frac{-\pi}{3}\right) && \text{(forme trigonométrique)} \\ &= 4\left(\frac{1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= 2 - 2\sqrt{3}i && \text{(forme algébrique)} \end{aligned}$$

2. $z = 2\cdot\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}i\right)^4 \cdot (-1-i)^6$

Écrivons $z' = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$ sous forme trigonométrique :

$|z'| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = 2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\varphi') = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\varphi') = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi' = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc $z' = 2\sqrt{2}\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Écrivons $z'' = -1 - i$ sous forme trigonométrique :

$|z''| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\left(\varphi''\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2ex] \sin\left(\varphi''\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \varphi''=\frac{5\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Donc $z''=\sqrt{2}\text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$

D'où

$$\begin{aligned}
z&=2\cdot\left(2\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4\cdot\left(\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)^6\\
&=2\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^4\text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)^6\text{cis}\left(\frac{15\pi}{2}\right)\\
&=2^{10}\text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{15\pi}{2}\right)\\
&=2^{10}\text{cis}\left(\frac{53\pi}{6}\right)\\
&=2^{10}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Les racines cinquièmes complexes de z sont de la forme :

$z_k=\sqrt[5]{2^{10}}\text{cis}\left(\dfrac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{5}\right)$ avec $k\in\{0;1;2,3;4\}$

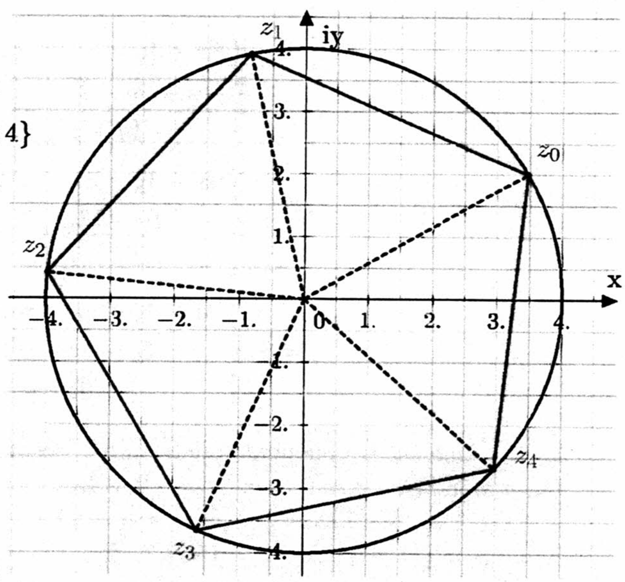
$z_0=4\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$z_1=4\text{cis}\left(\dfrac{17\pi}{30}\right)$

$z_2=4\text{cis}\left(\dfrac{29\pi}{30}\right)$

$z_3=4\text{cis}\left(\dfrac{41\pi}{30}\right)$

$z_4=4\text{cis}\left(\dfrac{53\pi}{30}\right)$



Question 3

(4+10=14 points)

1.

$$\begin{cases} 2mx + 4y + (m-1)z &= m-2 \\ -x + (m+2)y - 2z &= 3 \\ -my + z &= 2-m \end{cases}$$

Méthode de Cramer :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2m & 4 & m-1 \\ -1 & m+2 & -2 \\ 0 & -m & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 + 4m + m^2 - m - 4m^2 + 4$$

$$= -m^2 + 3m + 4$$

$$= -(m-4)(m+1)$$

Le système admet une solution unique $\iff m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$

2. $\boxed{\text{Si } m = 4}$

$$\begin{cases} 8x + 4y + 3z &= 2 & (E_1) \\ -x + 6y - 2z &= 3 & (E_2) | (E_1) + 8 \cdot (E_2) \\ -4y + z &= -2 & (E_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 8x + 4y + 3z &= 2 & (E_1) \\ 52y - 13z &= 26 & (E_2) \\ -4y + z &= -2 & (E_3) | (E_2) + 13 \cdot (E_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 8x + 4y + 3z &= 2 & (E_1) \\ 4y - 1z &= 2 & (E_2) \\ 0z &= 0 & (E_3) \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons $y = \lambda \in \mathbb{R}$.
On a alors $4\lambda - z = 2 \iff z = -2 + 4\lambda$
et $8x + 4\lambda - 6 + 12\lambda = 2 \iff x = 1 - 2\lambda$
Donc $\mathcal{S} = \{(1 - 2\lambda; \lambda; -2 + 4\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace qui se coupent suivant la droite passant par le point $A\,(1; 0; -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Si } m=-1}$

$$\begin{cases} -2x+4y-2z & =-3 \quad (E_1) \\ -x+y-2z & =3 \quad (E_2)|(E_1)-2\cdot(E_2) \\ y+z & =3 \quad (E_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x+4y-2z & =-3 \quad (E_1) \\ 2y+2z & =-9 \quad (E_2) \\ y+z & =3 \quad (E_3)|(E_2)-2\cdot(E_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x+4y-2z & =-3 \quad (E_1) \\ 2y+2z & =-9 \quad (E_2) \\ 0z & =-15 \quad (E_3) \quad \text{(équation impossible)} \end{cases}$$

Le système est impossible. Donc $\mathcal{S}=\emptyset$.
Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace qui n'ont aucun point commun.

$\boxed{\text{Si } m=-4}$

$$\begin{cases} -8x+4y-5z & =-6 \quad (E_1) \\ -x-2y-2z & =3 \quad (E_2)|(E_1)-8\cdot(E_2) \\ 4y+z & =6 \quad (E_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -8x+4y-5z & =-6 \quad (E_1) \\ 20y+11z & =-30 \quad (E_2)|(E_2)-5\cdot(E_3) \\ 4y+z & =6 \quad (E_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -8x+4y-5z & =-6 \quad (E_1) \\ 20y+11z & =-30 \quad (E_2) \\ 6z & =-60 \quad (E_3) \end{cases}$$

(E_3) donne $z=-10$
En remplaçant dans (E_2) : $20y+11\cdot(-10)=-30 \iff 20y=80 \iff y=4$
Et dans (E_1) : $-8x+4\cdot 4-5\cdot(-10)=-6 \iff -8x=-72 \iff x=9$
Donc $\mathcal{S}=\{(9;4;-10)\}$.
Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace qui se coupent au point $B\,(9;4;-10)$.

Question 4

(4+5+4+3=16 points)

1.

$$\begin{aligned}
M(x;y;z) \in \pi_1 &\iff \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires} \\
&\iff \det\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -5 \\ y+2 & 2 & -4 \\ z-1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (x-3)\cdot(6-8) - (y+2)\cdot(3-10) + (z-1)\cdot(-4+10) = 0 \\
&\iff -2x + 7y + 6z + 14 = 0
\end{aligned}$$

(équation cartésienne du plan π_1)

2. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan π_1.
Comme la droite d est perpendiculaire au plan π_1, le vecteur $\vec{n}$ est aussi un vecteur directeur de la droite d.

$$\begin{aligned}
M(x;y;z) \in d &\iff \overrightarrow{DM} \text{ est colinéaire à } \vec{n} \\
&\iff (\exists k \in \mathbb{R}) : \quad \overrightarrow{DM} = k \cdot \vec{n} \\
&\iff (\exists k \in \mathbb{R}) : \quad \begin{pmatrix} x+2 \\ y-16 \\ z-8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On trouve un système d'équations paramétriques de d :

$$d \equiv \begin{cases} x &= -2 - 2k \quad (1) \\ y &= 16 + 7k \quad (2) \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z &= 8 + 6k \quad (3) \end{cases}$$

Pour trouver un système d'équations cartésiennes, éliminons k :

$(1) : k = -1 - \frac{1}{2}x$

Dans $(2) : y = 16 - 7 - \frac{7}{2}x \iff 7x + 2y - 18 = 0$

Dans $(3) : z = 8 - 6 - \frac{6}{2}x \iff 3x + z - 2 = 0$

D'où un système d'équations cartésiennes de $d \equiv \begin{cases} 7x + 2y - 18 &= 0 \\ 3x + z - 2 &= 0 \end{cases}$

3. Soit H le point de percée de d dans π_1.

$$H(x;y;z) \in d \cap \pi_1 \iff \begin{cases} x = -2 - 2k & (1) \\ y = 16 + 7k & (2) \\ z = 8 + 6k & (3) \\ -2x + 7y + 6z + 14 = 0 & (4) \end{cases}$$

$(1), (2)$ et (3) dans (4) :
$-2(-2-2k) + 7(16+7k) + 6(8+6k) + 14 = 0 \iff 89k + 178 = 0 \iff k = -2$
En remplaçant successivement dans $(1), (2)$ et (3), on obtient $x = 2$, $y = 2$ et $z = -4$.
La droite d perce le plan π_1 au point $H(2;2;-4)$.

4. Le plan π_2 comprend la droite d et le point E, donc le vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ de la droite d est aussi un vecteur directeur du plan π_2. Un deuxième vecteur directeur du plan est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in \pi_2 &\iff \overrightarrow{EM}, \vec{n} \text{ et } \vec{u} \text{ sont coplanaires} \\ &\iff \begin{cases} x &= -2 - 2\alpha \\ y &= 1 + 7\alpha + 5\beta \quad \text{avcc } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z &= 2 + 6\alpha + 2\beta \end{cases} \end{aligned}$$