EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES **Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT**			
Date :	20.09.23	*Durée :*	08:15 - 11:00
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse	*Section(s) :*	CD / CD-4LANG

MATHÉMATIQUES II - Correction

Question 1 (4 points)

Voir EM66 pages 86-87

Question 2 (4 + 6 = 10 points)

1) $6 \cdot (3^x + 3^{-x}) - 7 = 3^{-x+2}$ $\qquad D = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 6 \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{-x} - 7 = 9 \cdot 3^{-x}$

$\Leftrightarrow 6 \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{-x} - 7 - 9 \cdot 3^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow 6 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^{-x} - 7 = 0 \qquad | \cdot 3^x$

$\Leftrightarrow 6 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 3 = 0 \qquad$ Posons : $y = 3^x > 0$

$\Leftrightarrow 6y^2 - 7y - 3 = 0 \qquad \left[\Delta = 121 > 0, y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = -\frac{1}{3}\right]$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$ ou $y = -\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{3}{2}$ ou $\underbrace{3^x = -\frac{1}{3}}_{\text{impossible, car } 3^x > 0}$

$\Leftrightarrow x = \log_3 \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 - \log_3 2 \qquad S = \{1 - \log_3 2\}$

2) $\log_{\sqrt{2}}(2x+3) - \log_2(6-x) \geqslant 1 - \log_{\frac{1}{2}}(1+2x)$

C.E. : (1) $2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$ $\qquad$ (2) $6 - x > 0 \Leftrightarrow x < 6$ $\qquad$ (3) $1 + 2x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

$D = \left]-\frac{1}{2}; 6\right[$

$\frac{\ln(2x+3)}{\ln\sqrt{2}} - \frac{\ln(6-x)}{\ln 2} \geqslant 1 - \frac{\ln(1+2x)}{\ln\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(2x+3)}{\frac{1}{2}\ln 2} - \frac{\ln(6-x)}{\ln 2} \geqslant 1 - \frac{\ln(1+2x)}{-\ln 2} \qquad | \cdot \ln 2 > 0$

$\Leftrightarrow 2\ln(2x+3) - \ln(6-x) \geqslant \ln 2 + \ln(1+2x)$

$\Leftrightarrow \ln(2x+3)^2 \geqslant \ln 2 + \ln(1+2x) + \ln(6-x)$

$\Leftrightarrow \ln(2x+3)^2 \geqslant \ln[2(1+2x)(6-x)]$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 \geqslant 12 - 2x + 24x - 4x^2$

$\Leftrightarrow 8x^2 - 10x - 3 \geqslant 0 \qquad \left[\Delta = 196 > 0, x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = \frac{3}{2}\right]$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$8x^2 - 10x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left]-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; 6\right[$

Question 3 (3 + 4 + 4 + 3 + 5 = 19 points)

$f(x) = x(x-3)e^{1-\frac{x}{2}}$

1) $dom\ f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x(x-3)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{1-\frac{x}{2}}}_{\to+\infty} = +\infty$$

pas d'A.H.G.

A.O.G. ?

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(x-3)e^{1-\frac{x}{2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x-3)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{1-\frac{x}{2}}}_{\to+\infty} = -\infty$$

pas d'A.O.G.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x(x-3)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{1-\frac{x}{2}}}_{\to 0} \text{ f.i.}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x(x-3)}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^{-1+\frac{x}{2}}}_{\to+\infty}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{\frac{1}{2}e^{-1+\frac{x}{2}}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\underbrace{\frac{1}{4}e^{-1+\frac{x}{2}}}_{\to+\infty}}$$

$$= 0$$

A.H.D.: $y = 0$

2) *dom* f' = *dom* f

$$f'(x) = (2x-3)e^{1-\frac{x}{2}} + (x^2-3x)e^{1-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}(-4x+6+x^2-3x)$$
$$= -\frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}(x^2-7x+6)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \ [\Delta = 25 > 0, x_1 = 1, x_2 = 6]$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 6$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2\sqrt{e}$	↗	$\frac{18}{e^2}$	↘	0

Minimum : $f(1) = -2\sqrt{e}$ $\qquad m(1; -2\sqrt{e})$

Maximum : $f(6) = \frac{18}{e^2}$ $\qquad M\left(6; \frac{18}{e^2}\right)$

3) *dom* f'' = *dom* f'

$$f''(x) = \frac{1}{4}e^{1-\frac{x}{2}}(x^2-7x+6) - \frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}(2x-7)$$
$$= \frac{1}{4}e^{1-\frac{x}{2}}(x^2-7x+6-4x+14)$$
$$= \frac{1}{4}e^{1-\frac{x}{2}}(x^2-11x+20)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-11x+20 = 0 \left[\Delta = 41 > 0, x_1 = \frac{11+\sqrt{41}}{2}, x_2 = \frac{11-\sqrt{41}}{2}\right]$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{11+\sqrt{41}}{2} \text{ ou } x = \frac{11-\sqrt{41}}{2}$$

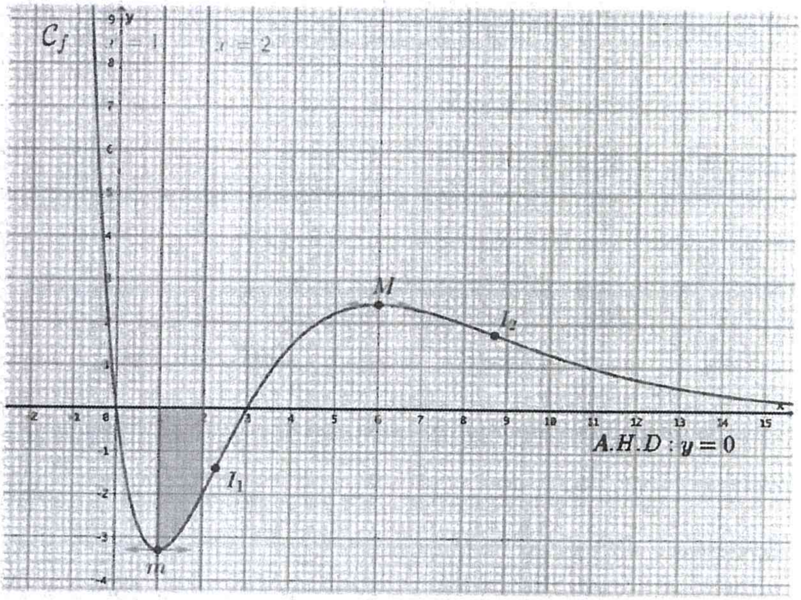
Tableau de concavité :

x	$-\infty$		$\frac{11-\sqrt{41}}{2}$		$\frac{11+\sqrt{41}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
C_f		$\smile$	*P.I.*	$\frown$	*P.I.*	$\smile$	

Points d'inflexion : $f\left(\dfrac{11-\sqrt{41}}{2}\right) \approx -1,39$ $\qquad I_1\,(\approx 2,30; \approx -1,39)$

$f\left(\dfrac{11+\sqrt{41}}{2}\right) \approx 1,74$ $\qquad I_2\,(\approx 8,7; \approx 1,74)$

4) Représentation graphique :



5) Aire :

$$A = -\int_1^2 (x^2-3x)e^{1-\frac{x}{2}}\,dx \qquad f(x) = x^2-3x \qquad g'(x) = e^{1-\frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = 2x-3 \qquad g(x) = -2e^{1-\frac{x}{2}}$$

$$\overset{IPP}{=} \left[2(x^2-3x)e^{1-\frac{x}{2}}\right]_1^2 + \int_1^2 (-4x+6)e^{1-\frac{x}{2}}\,dx$$

$$f(x) = -4x+6 \qquad g'(x) = e^{1-\frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = -4 \qquad g(x) = -2e^{1-\frac{x}{2}}$$

$$\overset{IPP}{=} -4+4\sqrt{e} + \left[-2(-4x+6)e^{1-\frac{x}{2}}\right]_1^2 - \int_1^2 8e^{1-\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= -4+4\sqrt{e}+4+4\sqrt{e}+\left[16e^{1-\frac{x}{2}}\right]_1^2$$

$$= 8\sqrt{e}+16-16\sqrt{e}$$

$$= 16-8\sqrt{e}$$

$$= 8(2-\sqrt{e}) \approx 2,81 \text{ u.a.}$$

Question 4 (6 + 3 = 9 points)

$f(x) = x + 2 - \ln \dfrac{2x}{x+1}$

1) C.E. (1) $\dfrac{2x}{x+1} > 0$ (2) $x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2x}{x+1}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$dom\ f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{x+2}_{\to\pm\infty} - \underbrace{\ln\frac{2x}{x+1}}_{\to\ln 2 (*)}\right) = \pm\infty$$ pas d'A.H.G.

$$(*) \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x+1} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x} = 2$$

A.O. ?

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2-\ln\frac{2x}{x+1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\ln\frac{2x}{x+1}}_{\to\ln 2}\right)$$

$$= 1\ (= a)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2 - \underbrace{\ln\frac{2x}{x+1}}_{\to\ln 2}\right) = 2 - \ln 2$$

Donc : A.O.: $y = x + 2 - \ln 2$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-}\left(\underbrace{x+2}_{\to 1} - \underbrace{\ln\overbrace{\frac{2x}{x+1}}^{\to+\infty}}_{\to+\infty}\right) = -\infty$$ A.V.: $x = -1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{x+2}_{\to 2} - \underbrace{\ln\overbrace{\frac{2x}{x+1}}^{\to 0^+}}_{\to-\infty}\right) = +\infty$$ A.V.: $x = 0$

2) $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[: \varphi(x) = f(x) - (x+2-\ln 2) = -\ln\frac{2x}{x+1} + \ln 2$

Résolvons : $-\ln\frac{2x}{x+1} + \ln 2 > 0 \Leftrightarrow \ln\frac{2x}{x+1} < \ln 2 \Leftrightarrow \frac{-2}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x > -1$

x	$-\infty$		-1	0		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	$\|\|$	$\|\|$	$+$	
Position		$A.O./\mathcal{C}_f$	$\|\|$	$\|\|$	$\mathcal{C}_f/A.O.$	

Question 5 (3 + 3 = 6 points)

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{1-2x} = \lim\limits_{h\to 0^+}(1+h)^{1+\frac{6}{h}}$ Posons : $h = -\frac{3}{x} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^+}\left[(1+h)^{\frac{6}{h}}\cdot(1+h)\right]$ Si $x \to -\infty$, alors $h \to 0^+$

$= e^6$

2) $\int_3^4 \frac{3x-9}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx = \int_3^4 (3x-9)(6x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$ $u(x) = 6x - x^2$ $u'(x) = 6-2x$

$= \int_3^4 -\frac{3}{2}(6-2x)(6x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \left[-3(6x-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_3^4$

$= \left[-3\sqrt{6x-x^2}\right]_3^4$

$= -3\sqrt{8}+9$

$= 9-6\sqrt{2}$

Question 6 (3 + 4 = 7 points)

1) $f(x) = \frac{12x^2-21x+3}{4x^3-3x+1} = \frac{12x^2-21x+3}{(x+1)(2x-1)^2}$ $dom\ f = \mathbb{R}\setminus\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$

$\frac{12x^2-21x+3}{(x+1)(2x-1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{2x-1} + \frac{c}{(2x-1)^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$

$\Leftrightarrow \frac{12x^2-21x+3}{(x+1)(2x-1)^2} = \frac{a(2x-1)^2 + b(x+1)(2x-1) + c(x+1)}{(x+1)(2x-1)^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$

$\Leftrightarrow 12x^2-21x+3 = a(2x-1)^2 + b(x+1)(2x-1) + c(x+1)$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$

Cette égalité entre polynômes reste vraie $\forall x \in \mathbb{R}$

Si $x = -1 : 36 = 9a \Leftrightarrow a = 4$

Si $x = \frac{1}{2} : -\frac{9}{2} = \frac{3}{2}c \Leftrightarrow c = -3$

Si $x = 0 : 3 = a - b + c \Leftrightarrow 3 = 4 - b - 3 \Leftrightarrow b = -2$

Donc : $f(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{2}{2x-1} - \frac{3}{(2x-1)^2}$

2) $f(x) = 4 \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{2}{2x-1} - \frac{3}{2} \cdot (2x-1)^{-2} \cdot 2$

$F(x) = 4\ln|x+1| - \ln|2x-1| + \frac{3}{2(2x-1)} + c \; (c \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} F(1) = \ln 16 &\Leftrightarrow 4\ln|x+1| - \ln|2x-1| + \frac{3}{2(2x-1)} + c = \ln 16 \\ &\Leftrightarrow 4\ln 2 - 0 + \frac{3}{2} + c = 4\ln 2 \\ &\Leftrightarrow c = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc : $F(x) = 4\ln|x+1| - \ln|2x-1| + \frac{3}{2(2x-1)} + \frac{3}{2}$

Question 7 (5 points)

Volume :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{0} \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx \\ &= \pi \int_{-2}^{0} \left[(2^{-x} - 6)^2 - \left(-\frac{3}{2}x - 5\right)^2\right] dx \\ &= \pi \int_{-2}^{0} \left(2^{-2x} - 12 \cdot 2^{-x} + 36 - \frac{9}{4}x^2 - 15x - 25\right) dx \\ &= \pi \int_{-2}^{0} \left(2^{-2x} - 12 \cdot 2^{-x} - \frac{9}{4}x^2 - 15x + 11\right) dx \\ &= \pi \left[\frac{2^{-2x}}{-2\ln 2} + 12 \cdot \frac{2^{-x}}{\ln 2} - \frac{3}{4}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 11x\right]_{-2}^{0} \\ &= \pi \left[\left(\frac{1}{-2\ln 2} + \frac{12}{\ln 2} - 0 - 0 + 0\right) - \left(\frac{2^4}{-2\ln 2} + 12 \cdot \frac{2^2}{\ln 2} + 6 - 30 - 22\right)\right] \\ &= \pi \left(\frac{1}{-2\ln 2} + \frac{12}{\ln 2} + \frac{8}{\ln 2} - \frac{48}{\ln 2} + 46\right) \\ &= \pi \left(46 - \frac{56}{2\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2}\right) \\ &= \pi \left(46 - \frac{57}{2\ln 2}\right) \approx 15,34 \text{ u.v.} \end{aligned}$$
