EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES			
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT			
Date :	22.09.23	*Durée :*	08:15 - 10:15
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse	*Section(s) :*	CA-MALA / CA-MALF / CE / CE-4LANG / CF / CG / CG-4LANG / CG-COMED / CG-URBS

Partie 1

Question 1 - (8 points)

$$\begin{cases} \frac{2y+4x}{2} - \frac{2y+5(x+z)}{3} + \frac{5}{6}(z-1) = 0 & E_1 \\ 3(z-3) + 2(y+z-x) = 2z - (x+10) & E_2 \\ 9z - 3x + 5 = 2 - 6y & E_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(2y+4x) - 2(2y+5x+5z) + 5(z-1) = 0 \\ 3z - 9 + 2y + 2z - 2x = 2z - x - 10 \\ -3x + 6y + 9z = -3 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} 2x + 2y - 5z = 5 \\ -x + 2y + 3z = -1 \\ -3x + 6y + 9z = -3 \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 5z = 5 \\ 3x - 8z = 6 & E_2 \leftarrow E_1 - E_2 \\ 9x - 24z = 18 & E_3 \leftarrow 3E_1 - E_3 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 5z = 5 \\ 3x - 8z = 6 \\ 0z = 0 & E_3 \leftarrow 3E_2 - E_3 \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons $z = r$ avec $r \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x + 2y - 5z = 5 \\ 3x = 6 + 8r \\ z = r \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 5 + 5r - 2\left(2 + \frac{8}{3}r\right) \\ x = 2 + \frac{8}{3}r \\ z = r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 - \frac{1}{3}r \\ x = 2 + \frac{8}{3}r \\ z = r \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}r \\ x = 2 + \frac{8}{3}r \\ z = r \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{\left(2 + \frac{8}{3}r \,;\, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}r \,;\, r\right), r \in \mathbb{R}\right\}$

En posant $y = r$, on obtient $\mathcal{S} = \{(10 - 16r \,;\, r \,;\, 3 - 6r), r \in \mathbb{R}\}$

En posant $x = r$, on obtient $\mathcal{S} = \left\{\left(r \,;\, \frac{5}{8} - \frac{1}{16}r \,;\, -\frac{3}{4} + \frac{3}{8}r\right), r \in \mathbb{R}\right\}$

Question 2 - (12 points)

Soit x le nombre de tasses et y le nombre de gobelets avec couvercles.

Système d'inéquations : $\begin{cases} x \geq 15 \\ y \geq 10 \\ x + y \geq 30 \\ 10x + 15y \leq 480 \end{cases}$ [8 heures = 480 minutes]

Droites à tracer dans un repère :

$d_1 \equiv x = 15$ $d_2 \equiv y = 10$ $d_3 \equiv y = -x + 30$ $d_4 \equiv y = -\frac{2}{3}x + 32$

Point-test $O(0; 0)$:

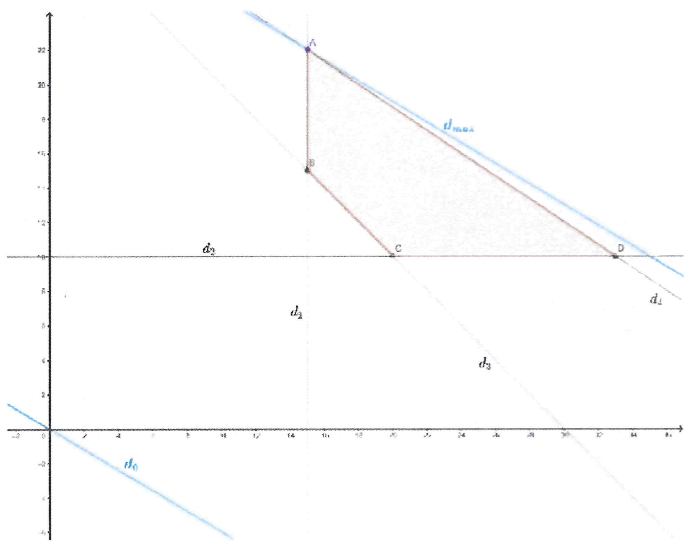
$0 < 15$ donc O n'appartient pas au demi-plan $x \geq 15$

$0 < 10$ donc O n'appartient pas au demi-plan $y \geq 10$

$0 + 0 < 30$ donc O n'appartient pas au demi-plan $x + y \geq 30$

$0 + 0 < 480$ donc O appartient au demi-plan $10x + 15y \leq 480$

Polygone des contraintes :



Fonction à optimiser : $R(x; y) = 15x + 25y$

Soit $d_0 \equiv 15x + 25y = 0 \Leftrightarrow d_0 \equiv y = -\frac{3}{5}x$

La droite d_{max} parallèle à d_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est la plus éloignée de l'origine passe par le sommet $A(15; 22)$ (par lecture graphique).

Conclusion :

La classe doit fabriquer et vendre 15 tasses et 22 gobelets avec couvercle pour obtenir une recette maximale.

Or, $R(15\,;22) = 15 \cdot 15 + 25 \cdot 22 = 775$

Cette recette maximale est alors de 775 €.

Partie 2

Question 3 - (9 points = 4+3+2)

1. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 4x + 3$

- $f'(x) = -x^2 - 4x - 4 = -(x+2)^2$
- Racines de f' : $f'(x) = 0 \iff -(x+2)^2 = 0$

  $\iff x = -2$
- Tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{17}{3}$	$\searrow$	

$f(-2) = \frac{17}{3}$

f n'admet pas d'extrema

2. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 4x + 3$ et $f'(x) = -x^2 - 4x - 4$

- $f''(x) = -2x - 4$
- Racines de f'' : $f''(x) = 0 \iff -2x - 4 = 0$

  $\iff x = -2$
- Tableau de concavité :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{C}_f$		$\cup$	$\frac{17}{3}$	$\cap$	

$\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion : $I\left(-2; \frac{17}{3}\right)$

3. <u>Méthode 1 :</u>

$T_0 \equiv y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 0$

- $f(0) = 3$
- $f'(0) = -4$

Donc $T_0 \equiv y = -4x + 3$

<u>Méthode 2 :</u>

$T_0 \equiv y = mx + p$ or, $f'(0) = -4$ et T_0 passe par le point $A(0; f(0)) = A(0\,;3)$

Ainsi, $T_0 \equiv y = -4x + 3$

Question 4 - (10 points = (3+3)+(2+2))

1. Equations :

a) $-11 - 2 \cdot 8^{2x-1} = 3 \cdot 8^{2x-1} + 9$

$\Leftrightarrow -5 \cdot 8^{2x-1} = 20$

$\Leftrightarrow 8^{2x-1} = -4$ impossible, car une puissance de base positive ne peut pas être négative.

Ainsi, $\mathcal{S} = \emptyset$

b) $\log_5(1-x) - 5 = 7 - 2\log_5(1-x)$

$\Leftrightarrow 3\log_5(1-x) = 12$

$\Leftrightarrow \log_5(1-x) = 4$

$\Leftrightarrow 1 - x = 5^4$

$\Leftrightarrow x = -624$ Ainsi, $\mathcal{S} = \{-624\}$

2. $\log a = 2{,}5$ et $\log b = -2$

a) $\log(a^2 b^{-3}) = \log a^2 + \log b^{-3}$

$= 2\log a - 3\log b$

$= 5 + 6$

$= 11$

b) $\log \frac{\sqrt{b}}{a^2} = \log\sqrt{b} - \log a^2$

$= \frac{1}{2}\log b - 2\log a$

$= -1 - 5$

$= -6$

Question 5 - (6 points)

$f(x) = 2x^2 - x + 1$ et $a = -1$

- Par les formules :

  $f'(x) = 4x - 1$ et avec $a = -1$, $f'(-1) = -5$

- Par la définition :

  Le taux de variation moyen de f entre a et $a + h$ est donné par :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2(a+h)^2 - (a+h) + 1 - (2a^2 - a + 1)}{h} \quad \text{or, } a = -1$$

$$= \frac{2(1 - 2h + h^2) + 1 - h + 1 - 2 - 1 - 1}{h}$$

$$= \frac{2h^2 - 5h}{h}$$

$$= \frac{h(2h-5)}{h}$$

$$= 2h - 5$$

Le taux de variation instantané de f en 1 est obtenu en remplaçant h par 0 dans cette expression :
Or, $2 \cdot 0 - 5 = -5$ Ainsi, $f'(-1) = -5$.

Partie 3

Question 6 - (7 points = 3+2+2)

1. Tableau :

	Thé	Café noir	Boisson au lait	Total
Femme	21 %	10 %	19 %	50 %
Homme	9 %	35 %	6 %	50 %
Total	30 %	45 %	25 %	100 %

2. **a)** $p(femme\ qui\ ne\ boit\ pas\ de\ thé) = \frac{10+19}{100} = 29\ \%$

   b) $p(homme\ sachant\ lait) = \frac{6}{25} = 24\ \%$

Question 7 - (8 points = 2+3+3)

1. Simultanément : C_n^p avec $n = 52$ et $p = 5$

$$p(obtenir\ 5\ cartes\ rouges) = \frac{C_{26}^5}{C_{52}^5} = \frac{253}{9\,996} \approx 2{,}5\ \%$$

2. $p(obtenir\ au\ moins\ un\ roi) = 1 - p(n'obtenir\ aucun\ roi)$

$$= 1 - \frac{C_{48}^5}{C_{52}^5} = \frac{18\,472}{54\,145} \approx 34{,}1\ \%$$

3. Il faut distinguer les cas :

   - 4 piques non dame et 1 dame non pique :

$$C_{12}^4 \cdot C_3^1 = 1\,485$$

   - 3 piques non dame et 1 dame de pique et 1 autre carte non dame et non pique :

$$C_{12}^3 \cdot C_1^1 \cdot C_3^0 \cdot C_{36}^1 = 7\,920$$

Ainsi, $p(obtenir\ exactement\ une\ dame\ et\ 4\ piques) = \frac{1\,485 + 7\,920}{C_{52}^5} = \frac{627}{173\,264} \approx 0{,}4\ \%$