EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES			
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT			
Date :	25.09.23	*Durée :*	08:15 - 10:15
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse	*Section(s) :*	CA-MALA / CA-MALF / CE / CE-4LANG / CF / CG / CG-4LANG / CG-COMED / CG-URBS

Partie I : Systèmes d'équations et d'inéquations.

Question 1: *(6 points)*

$$\begin{cases} 2x+y-3z=5 \\ 4\cdot(x+y)-z=14 \\ 7z+24=2\cdot(4x+3y) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y-3z=5 \\ 4x+4y-z=14 \\ 7z+24=8x+6y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+y-3z=5 \\ 4x+4y-z=14 \\ -8x-6y+7z=-24 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y-3z=5 & (1) \\ 2y+5z=4 & (2)-2\cdot(1) \\ -2y-5z=-4 & (3)+4\cdot(1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+y-3z=5 & (1) \\ 2y+5z=4 & (2) \\ 0\cdot z=0 & (3)+(2) \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons $z=r$ avec $r\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x+y-3r=5 \\ y=2-\frac{5}{2}r \\ z=r \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+2-\frac{5}{2}r-3r=5 \\ y=2-\frac{5}{2}r \\ z=r \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\frac{3}{2}+\frac{11}{4}r \\ y=2-\frac{5}{2}r \\ z=r \end{cases}$$

donc $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{3}{2}+\frac{11}{4}r;2-\frac{5}{2}r;r\right),r\in\mathbb{R}\right\}$

En posant $y=r$ on obtient $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{37}{10}-\frac{11}{10}r;r;\frac{4}{5}-\frac{2}{5}r\right),r\in\mathbb{R}\right\}$

En posant $x=r$ on obtient $\mathcal{S}=\left\{\left(r;\frac{37}{11}-\frac{10}{11}r;\frac{4}{11}r-\frac{6}{11}\right),r\in\mathbb{R}\right\}$

Question 2: *(10+2+2=14 points)*

1. Soit x le nombre de robes de modèle A et y le nombre de robes de modèle B.

Il faut résoudre le système suivant: $\begin{cases} x; y \in \mathbb{N} \\ 3x + 2y \leq 16 \\ 8x + 12y \leq 56 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x; y \in \mathbb{N} \\ 3x + 2y \leq 16 \\ 2x + 3y \leq 14 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Soit $d_1 \equiv 3x + 2y - 16 = 0 \iff y = 8 - \frac{3}{2}x$ donc $A\,(2;5)\,;B\,(4;2) \in d_1$.

Soit $d_2 \equiv 2x + 3y - 14 = 0 \iff y = \frac{14}{3} - \frac{2}{3}x$ donc $B\,(4;2)\,;C\,(1;4) \in d_2$.

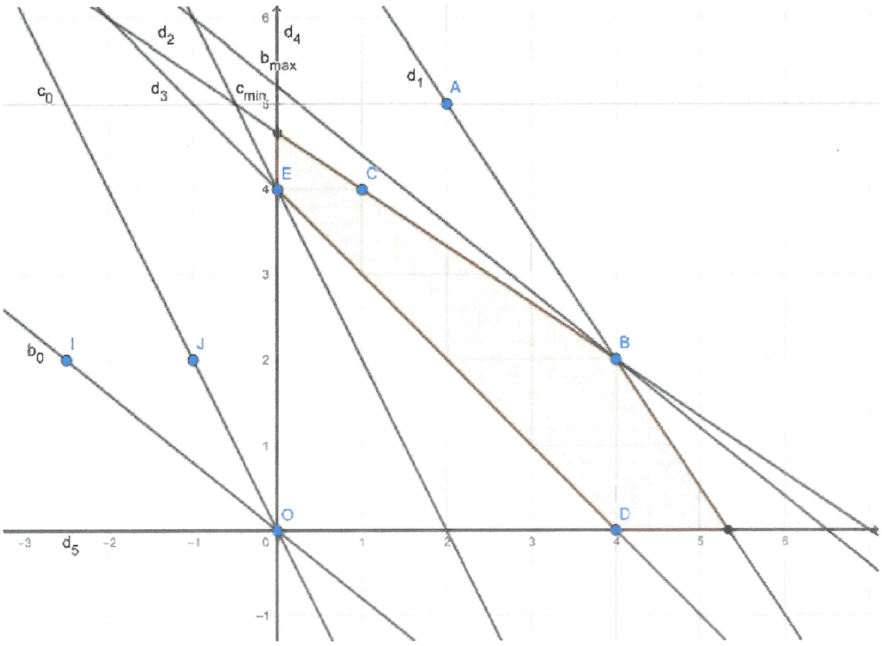
Soit $d_3 \equiv x + y - 4 = 0 \iff y = 4 - x$ donc $D\,(4;0)\,;E\,(0;4) \in d_3$.

Soit $d_4 \equiv x = 0$ donc $O\,(0;0)\,;E\,(0;4) \in d_4$.

Soit $d_5 \equiv y = 0$ donc $O\,(0;0)\,;D\,(4;0) \in d_5$.

On choisit le point de coordonnées $(1;1)$

dans d_1 : $-11 < 0$ dans d_2 : $-9 < 0$ dans d_3 : $-2 < 0$ dans d_4 : $1 > 0$ dans d_5 : $1 > 0$.



2. On a la fonction bénéfice $b(x;y) = 80x + 100y$

   Soit $b_0 \equiv 80x + 100y = 0 \iff y = -\frac{4}{5}x$ donc $O(0;0)\,;\, I(-2,5;2) \in b_0$.

   La droite $b_{\max}$ parallèle à b_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est la plus éloignée de $O(0;0)$ passe par $B(4;2)$.

   L'atelier doit fabriquer et vendre 4 robes de modèle A et 2 robes de modèle B pour obtenir un bénéfice maximal.

   Ce bénéfice maximal est: $b(4;2) = 4 \cdot 80 + 2 \cdot 100 = 520$€.

3. On a la fonction coût $c(x;y) = 40x + 20y$

   Soit $c_0 \equiv 40x + 20y = 0 \iff y = -2x$ donc $O(0;0)\,;\, J(-1;2) \in c_0$.

   La droite $c_{\max}$ parallèle à c_0 qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est la plus proche de $O(0;0)$ passe par $E(0;4)$.

   L'atelier doit fabriquer 0 robes de modèle A et 4 robes de modèle B pour avoir un coût minimal.

   Ce coût minimal est: $c(0;4) = 4 \cdot 20 = 80$€.

Partie II : Analyse.

Question 3: *(4+3+3=10 points)*

1. Soit f la fonction définie par: $$f(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 4$$

   $f'(x) = -3x^2 + 10x - 3 \qquad \Delta = 64; \sqrt{\Delta} = 8$

   $f'(x) = 0 \iff x = 3$ ou $x = \frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	

   min: $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - 4 = -\frac{121}{27} \simeq -4,5$

   Max: $f(3) = -3^3 + 5 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 4 = 5$

2. $f''(x) = -6x + 10$

   $f''(x) = 0 \iff x = \frac{5}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
C_f		convexe	$P.I.$	concave	

   P.I: $f\left(\frac{5}{3}\right) = -\left(\frac{5}{3}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) - 4 = \frac{7}{27}$

   donc $A\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{27}\right)$ est le point d'infexion de $\mathcal{C}_f$.

3. On a: $t_2 \equiv y = f'(2) \cdot x + b$ et $(2; f(2)) \in t_2$

   $f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 3 = 5$

   $f(2) = -2^3 + 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 4 = 2$

   donc $(2;2) \in t_2 \iff 2 = 5 \cdot 2 + b \iff b = -8$

   ainsi $t_2 \equiv y = 5x - 8$

   ou

   $t_2 \equiv y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$ avec $a = 2$

   Comme $f(2) = 2$ et $f'(2) = 5$ on a: $t_2 \equiv y = 5 \cdot (x-2) + 2 \iff y = 5x - 8$.

Question 4: *(2+2+2=6 points)*

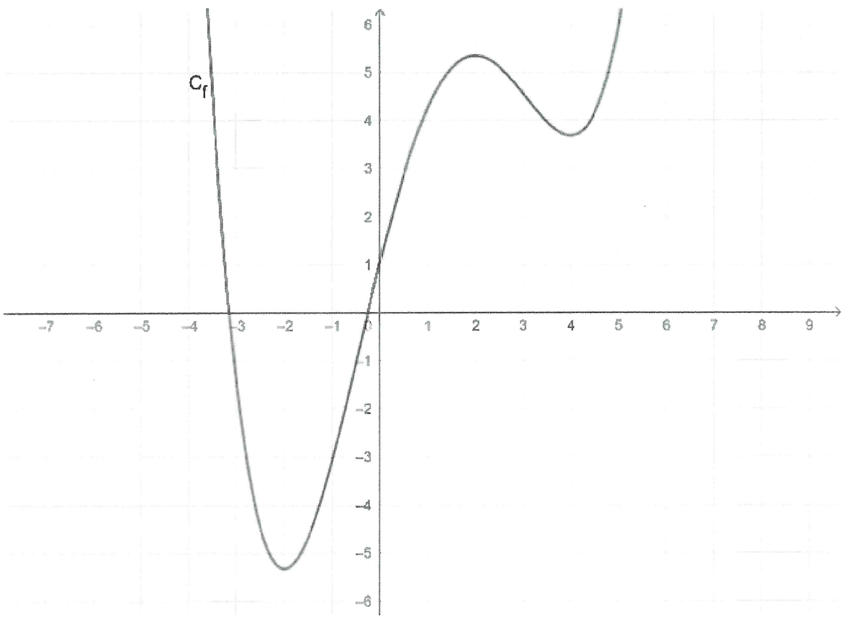
1. On voit que $f'(x) = 0 \iff x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = 4$

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

2.

x	$-\infty$		$\simeq -0,4$		$\simeq 3,1$		$+\infty$
$f'(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
C_f		convexe	$P.I$	concave	$P.I$	convexe	

3.



Question 5: *((2+2)+(2+3)=9 points)*

1. Sachant que $\log(a) = -2,5$ et $\log(b) = -3,25$ calculer en utilisant les propriétés des logarithmes.

   a) $\log(a^2 \cdot b) = \log(a^2) + \log(b) = 2 \cdot \log(a) + \log(b) = -5 - 3,25 = -8,25$

   b) $\log\left(\frac{\sqrt{a}}{b^3}\right) = \log\sqrt{a} - \log(b^3) = \frac{1}{2} \cdot \log(a) - 3 \cdot \log(b) = 8,5$

2. a)
$$\begin{array}{rl} & 2 + 3 \cdot \log_2(x-1) = 10 - \log_2(x-1) \\ \Longleftrightarrow & 4 \cdot \log_2(x-1) = 8 \\ \Longleftrightarrow & \log_2(x-1) = 2 \\ \Longleftrightarrow & x - 1 = 2^2 \\ \Longleftrightarrow & x = 5 \\ \text{donc} & \mathcal{S} = \{5\} \end{array}$$

   b)
$$\begin{array}{rl} & 120 - 2 \cdot 10^{2x+1} = 3 \cdot 10^{2x+1} - 380 \\ \Longleftrightarrow & -5 \cdot 10^{2x+1} = -500 \\ \Longleftrightarrow & 10^{2x+1} = 100 \\ \Longleftrightarrow & 2x + 1 = \log 100 \\ \Longleftrightarrow & 2x + 1 = 2 \\ \Longleftrightarrow & x = \frac{1}{2} \\ \text{donc} & \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\} \end{array}$$

Partie III : Probabilités et combinatoire.

Question 6: *(3+2+2=7 points)*

1. On a le tableau suivant:

	B	C	D	total:
garçons	10	184	126	320
filles	30	336	114	480
total:	40	520	240	800

2. On choisit au hasard un élève.

   a) $P(\text{garçon de la section } B) = \dfrac{10}{800} = \frac{1}{80} = 1,25\ \%$

   b) $P(\text{garçon} \mid \text{section } D) = \dfrac{126}{240} = \frac{21}{40} = 52,5\ \%$

Question 7: *(2+2+(2+2)=8 points)*

Une urne contient 4 boules rouges, 6 boules blanches et 8 boules noires.

1. On tire deux boules successivement avec remise de la première boule tirée.
   Soit A l'événement " tirer deux boules blanches ".
   $P(A) = \frac{6}{18} \cdot \frac{6}{18} = \frac{1}{9} \simeq 11,11\ \%$
2. On tire deux boules successivement sans remise de la première boule tirée.
   Soit B l'événement " tirer une boule blanche suivie d'une boule noire ".
   $P(B) = \frac{6}{18} \cdot \frac{8}{17} = \frac{8}{51} \simeq 15,69\ \%$
3. On tire deux boules simultanément de l'urne.
   a) Soit C l'événement " tirer deux boules de même couleur ".
   $P(C) = \dfrac{C_4^2 + C_6^2 + C_8^2}{C_{18}^2} = \dfrac{6+15+28}{153} = \frac{49}{153} \simeq 32,03\ \%$
   b) Soit D l'événement " tirer deux boules de couleurs différentes ".
   $P(D) = 1 - P(C) = 1 - \dfrac{49}{153} = \frac{104}{153} \simeq 67,97\ \%$
   ou $P(D) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_8^1 + C_6^1 \cdot C_8^1}{C_{18}^2} = \dfrac{4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 6 \cdot 8}{153} = \frac{104}{153} \simeq 67,97\ \%$