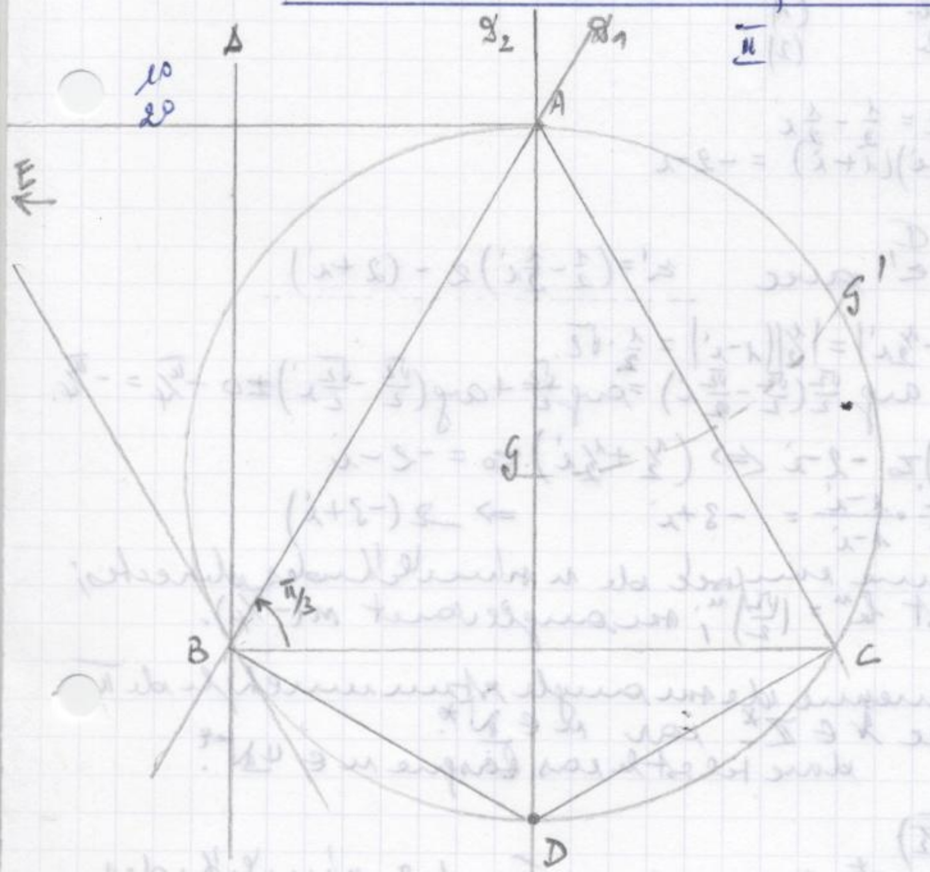
Examen de fin d'études secondaires.
Section [B]. Mathématiques 12 juin 2000.

II

1°
2°



$f = T \circ R$ avec $T = t_{\overrightarrow{BC}}$
$R = rot(B, \frac{\pi}{3})$.

f est un déplacement comme composé de 2 déplacements ; l'angle de f est : $0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$
Donc f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

$f(B) = T \circ R(B) = T(B) = C$.
$f(A) = T \circ R(A) = T(E) = A$
Donc A est le centre de f.
c.à.d. $f = rot(A, \frac{\pi}{3})$.

Ou bien :
$f = T \circ R = (s_{\mathcal{D}_2} \circ s_\Delta) \circ (s_\Delta \circ s_{\mathcal{D}_1})$
$= s_{\mathcal{D}_2} \circ (s_\Delta \circ s_\Delta) \circ s_{\mathcal{D}_1}$
$= s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1} = rot(A, \frac{\pi}{3})$
avec
$\Delta \perp (BC)$ et $\Delta \ni B$
$\mathcal{D}_1 = rot(B, -\frac{\pi}{6})(\Delta) = (AB)$
$\mathcal{D}_2 = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(\Delta) = (AD)$.

3° Le triangle (ABD) est rectangle en B car inscrit dans le cercle Γ de diamètre (AD) ! $GA = GB = GD = BD$ car $\widehat{BGD} = \frac{\pi}{3}$.

$G' = f(G) = rot(A, \frac{\pi}{3})(G)$ c.à.d. G' est le 3e sommet du Δ équilatéral (AGG') : $\begin{cases} AG = AG' \\ (\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AG'}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$ donc $AG = AG' = GG'$.
Il en résulte que : $G' \in \Gamma$.
Le Δ (ADG') est rectangle en G' et a le même diamètre (AD)
c.à.d. le quadrilatère $(ABDG')$ est un rectangle car $AD = BG'$.
Ou bien : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG'}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$.

4° $g = s_{(AD)} \circ s_{(DC)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AC)} = (s_{(AD)} \circ s_{(DC)}) \circ (s_{(AB)} \circ s_{(AC)})$
$= rot(D, \frac{2\pi}{3}) \circ rot(A, -\frac{2\pi}{3})$ $\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 0$; g est un déplacement d'angle 0, c.à.d. une translation.
$= (s_{\mathcal{D}''} \circ s_{\Delta'}) \circ (s_{\Delta'} \circ s_{\mathcal{D}'})$
$= s_{\mathcal{D}''} \circ s_{\mathcal{D}'} = 2 t_{\overrightarrow{AB}}$

avec : $\Delta' = (AD)$
$\mathcal{D}' = (AG') = rot(A, \frac{\pi}{3})(\Delta')$
$\mathcal{D}'' = (BD) = rot(D, \frac{\pi}{3})(\Delta')$.

III

1° $DB = \sqrt{(-2)^2 + 0} = 2$ et $DC = \sqrt{0 + 2^2} = 2$ donc $DB = DC$
c.à.d. $f(D) = D$ et $f(B) = C$; f existe et est unique.
$(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{DC}) - (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{DB}) = \arg(z_C - z_D) - \arg(z_B - z_D) = \arg \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D}$
$= \arg \frac{-1-i-(-1+i)}{1+i-(-1+i)} = \arg \frac{-2i}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f = rot(D, -\frac{\pi}{2})$.

2° $A \neq B$ et $B \neq C$ g existe et est unique ; expr. cmplx. de g : $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$; $b \in \mathbb{C}$).

a) $g(A) = B \iff 1 + i = a(1+5i) + b$ (1)
$g(B) = C \iff -1 - i = a(1+i) + b$ (2)

(1) − (2) : $4ia = 2 + 2i \iff a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
(2) → $b = -1 - i - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)(1+i) = -2 - i$

c.à.d. $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z'$ avec $z' = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)z - (2+i)$

b) rapport de g : $k = |a| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i| = |\frac{1}{2}||1 - i| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$.
angle de g : $\alpha = \arg a = \arg \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \arg\frac{\sqrt{2}}{2} + \arg(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) \equiv 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$.
centre Ω de g : $z_0 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)z_0 - 2 - i \iff (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z_0 = -2 - i$
$\iff z_0 = 2\cdot\frac{-2-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = -3 + i \implies \Omega(-3+i)$

c) g^n est une similitude comme composée de n similitudes directes ; son centre est Ω ; son rapport est $k^n = (\frac{\sqrt{2}}{2})^n$; son angle vaut $n(-\frac{\pi}{4})$.

g^n est une homothétie si une mesure de son angle est un multiple de π
c.à.d. $-n\frac{\pi}{4} = \lambda\pi$ avec $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ car $n \in \mathbb{N}^*$.
$n = \frac{-4\lambda\pi}{\pi} = -4\lambda$ donc tel est le cas lorsque $n \in 4\mathbb{N}^*$.

3° $f = \mathrm{rot}(D, -\frac{\pi}{2}) = \mathrm{sim}(D, 1, -\frac{\pi}{2})$
$f \circ g$ est une similitude directe comme composée de 2 similitudes directes ; de rapport $1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $(-\frac{\pi}{2}) + (-\frac{\pi}{4}) = -\frac{3\pi}{4}$.

IV

1° $\vec{AB}(-1,2,1)$; $\vec{AC}(-4,3,-4)$. $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (5,0,5)$ donc $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$
$\iff$ A, B, C ne sont pas alignés

2° $\mathcal{E} = \{ M \in \mathcal{E} \mid (2\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge \vec{BC} = \vec{0} \}$.

a) Soit $G = \mathrm{bar}\{(A,2)(B,1)\}$ donc $2\cdot\vec{GA} + 1\cdot\vec{GB} = \vec{0}$
on $\forall M \in \mathcal{E}$: $3\vec{MG} = 2\vec{MA} + 1\cdot\vec{MB}$. et $G \in (AB)$.
Donc : $(2\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge \vec{BC} = \vec{0} \iff 3\vec{MG} \wedge \vec{BC} = \vec{0}$ $|:3$
$M \in \Delta$ avec $\Delta \ni G$ et $\Delta \parallel (BC)$
c.à.d. $\mathcal{E}$ est la parallèle Δ à (BC) passant par G.

b) Soit $M(x,y,z)$; $\vec{BC}(-3,1,3)$; $2\vec{MA} + \vec{MB}(2-3x ; -1-3y ; 4-3z)$.
$(2\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge \vec{BC} = \vec{0} \iff$

$$(S)\begin{cases} (1) & -9y + 3z = 7 \\ (2) & 9x + 9z = 18 \quad |:2 \\ (3) & -3x - 9y = 1 \end{cases}$$

(1) − (3) : $3(x + z) = 6 \iff \begin{cases} x + z = 2 & (4) \\ x + z = 2 & (2) \end{cases}$

d'ailleurs $\det(S) = 0$.
Le système (S) est équivalent aux 2 équations $\begin{cases} -9y + 3z = 7 \\ x + z = 2. \end{cases}$
Ce sont les équations de 2 plans Q_1 et Q_2 non parallèles, par conséquent : $\mathcal{E} = Q_1 \cap Q_2$ est une droite.

3° On sait que $\frac{1}{5}(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = \frac{1}{5}(\vec{i} + \vec{k})$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
$M \in \mathcal{P} \iff \vec{AM} \perp \frac{1}{5}(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \iff \vec{AM} \cdot \frac{1}{5}(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0 \iff x + z = 2$.

4° $x + z - 2 = 0$ est l'équation de $\mathcal{P}$; c'est aussi celle de Q_2 et $\mathcal{E} \subset Q_2$
donc : $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$.