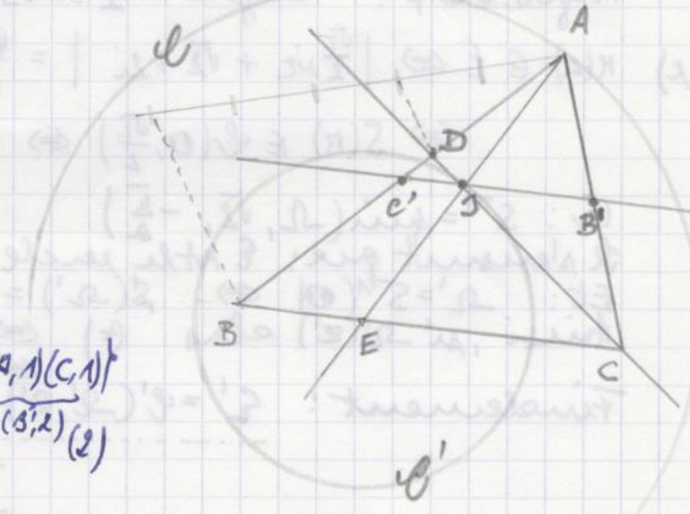
Examen de fin d'études secondaires.
Section B Maths 1a ; juin 2001.

II

a) $D = \text{bar}\{(A,3)(B,2)\} \Leftrightarrow 3\vec{DA} + 2\vec{DB} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\vec{DA} + 2\vec{DA} + 2\vec{AB} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \vec{AD} = \frac{2}{5}\vec{AB}$.



b.) $J = \text{bar}\{(A,3)(B,2)(C,1)\}$
$\Leftrightarrow J = \text{bar}\{(D,5)(C,1)\}$ (1)

$J = \text{bar}\{(A,3)(B,2)(C,1)\} = \text{bar}\{\underbrace{(A,2)(B,2)}_{(C',4)}\underbrace{(A,1)(C,1)}_{(B',2)}\}$

$J = \text{bar}\{(C',4)(B',2)\} = \text{bar}\{(B',1)(C',2)\}$. (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} J \in (CD) \\ J \in (B'C') \end{array}\right\} \Rightarrow J \in (DC) \cap (B'C')$

c) $\{E\} = (AJ) \cap (BC)$; considérons $h = \text{hom}(A,2)$.
* on a : $h(C') = B$; $h(B') = C$ (par donnée).
donc $h((B'C')) = (BC)$; $J \in (B'C') \Rightarrow h(J) \in (BC)$.
d'autre part $h(J) \in (AJ)$
c.à.d. $h(J) \in (CB) \cap (AJ) = E$

* De plus une homothétie conserve le barycentre : comme $J = \text{bar}\{(B',1)(C',2)\}$
$\Rightarrow E = h(J) = \text{bar}\{(h(B'),1)\ (h(C'),2)\} = \text{bar}\{(C,1)(B,2)\} = \text{bar}\{(B,2)(C,1)\}$ (3)

d) B et C fixes $\Rightarrow E = \text{bar}\{(B,2)(C,1)\}$ est fixe

D'autre part : $h(J) = E \Leftrightarrow \vec{AE} = 2\vec{AJ}$
$\Leftrightarrow \vec{AE} = 2\vec{AE} + 2\vec{EJ}$
$\Leftrightarrow \vec{EA} = 2\vec{EJ}$
$\Leftrightarrow \vec{EJ} = \frac{1}{2}\cdot\vec{EA}$
$\Leftrightarrow J = h'(A)$ avec $h' = \text{hom}(E, \frac{1}{2})$.

Si A parcourt $\mathscr{C}$, alors $J = h'(A)$ parcourt l'image du cercle $\mathscr{C}$ par l'homothétie h', c.à.d. le cercle $\mathscr{C}'$ de centre E et de rayon $\frac{1}{2}R$. (4)

III

a) Soit $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
$S(O) = A \Leftrightarrow \sqrt{2} + 2i = b$
$S(B) = C \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 + 2i = a\sqrt{2}\,i + b$

Donc : $\sqrt{2} - 1 + \cancel{2i} = a\sqrt{2}\,i + \sqrt{2} + \cancel{2i} \Rightarrow a = \frac{-1}{i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i$

Ainsi S : $z' = \left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot z + (\sqrt{2} + 2i)$

b.) $M_0(z_0)$ est invariant par $S \Leftrightarrow z_0 = i\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot z_0 + \sqrt{2} + 2i \quad |\cdot 2$
$\Leftrightarrow (2 - i\sqrt{2})\, z_0 = 2(\sqrt{2} + 2i)$
$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sqrt{2} - i)\, z_0 = 2\sqrt{2}(1 + i\sqrt{2})$
$\Leftrightarrow z_0 = \frac{2(1+i\sqrt{2})}{\sqrt{2}-i}\cdot\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}+i} = 2i$

c.à.d. $\Omega(2i)$ est le centre de S.

Rapport de S : $|a| = \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc : $S = \Sigma(\Omega, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2})$

Angle de S : $\arg a \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ $S = \text{simi}(\Omega, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2})$.

c) $M(z) \in \mathcal{E} \iff \left|\frac{\sqrt{2}}{2} i z + \sqrt{2} + 2i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff |z'| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff S(M) \in \mathcal{C}(O, \frac{\sqrt{2}}{2}) \iff M \in S^{-1}(\mathcal{C})$; d'où $\mathcal{E} = S^{-1}(\mathcal{C})$.

Or : $S^{-1} = \text{simi}(\Omega, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{2})$

Il s'ensuit que : $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $\Omega' = S^{-1}(O)$ et de rayon $R' = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

Et : $\Omega' = S^{-1}(O) \iff S(\Omega') = O$ (*)

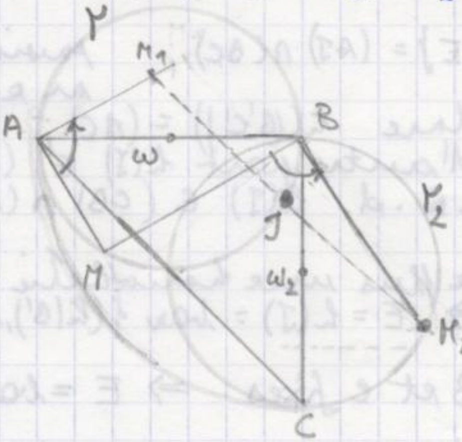
Ainsi, si $\Omega'(z')$ alors (*) $\iff 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} i z' + \sqrt{2} + 2i$

$\iff z' = -2\sqrt{2} + 2i$

Finalement : $\mathcal{E}' = \mathcal{C}'(\Omega', R')$ avec $\Omega'(-2\sqrt{2}, 2)$ et $R' = 1$.

IV

$R_A = \text{rot}(A, \frac{\pi}{2})$; $R_B = \text{rot}(B, \frac{\pi}{2})$. $\forall M \in \mathcal{P}$: $M_1 = R_A(M)$ et $M_2 = R_B(M)$



a) $T = R_B \circ R_A^{-1}$

$C = T(A) = R_B \circ R_A^{-1}(A) = R_B[R_A^{-1}(A)] = R_B(A)$.

b.) T est un déplacement (comme composée de 2 déplacements).

Angle de T : $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0 [2\pi]$.

T est donc une translation, et comme $T(A) = C$, on a : $T = t_{\vec{AC}}$

$M_1 = R_A(M) \iff M = R_A^{-1}(M_1)$

$M_2 = R_B(M) = R_B[R_A^{-1}(M_1)] = R_B \circ R_A^{-1}(M_1) = T(M_1) = t_{\vec{AC}}(M_1)$

$\iff \vec{M_1M_2} = \vec{AC} \iff (M_1M_2CA)$ est un #.

c) Si M parcourt le cercle Γ de diamètre $[A;B]$ alors $M_2 = R_B(M)$ parcourt le cercle $\Gamma_2 = R_B(\Gamma)$ de diamètre $[R_B(A); R_B(B)] = [C, B]$.

(L'image d'un cercle par une isométrie est un cercle....).

d.) $\omega = \text{mil}\,[A,B]$; $\omega_2 = \text{mil}\,[B,C]$

$\vec{\omega\omega_2} = \vec{\omega B} + \vec{B\omega_2} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}\cdot\vec{AC}$

e) $J = \text{mil}\,[M_1, M_2] \iff \vec{M_2J} = \frac{1}{2}\cdot\vec{M_2M_1} = \frac{1}{2}\vec{CA}$ car (M_1M_2CA) est un #.

Si M parcourt Γ alors M_2 parcourt Γ_2 ;
et J parcourt l'image de Γ_2 par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{CA} = \vec{\omega_2\omega}$

c.à.d. J parcourt le cercle de centre $t_{\vec{\omega_2\omega}}(\omega_2) = \omega$ et de même rayon que Γ_2,

c.à.d. J parcourt également le cercle Γ.