Examen de fin d'études secondaires
Section [B]. Maths 1A. Septembre 2000.

I

$f: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $M(x,y) \mapsto M'(x',y')$ avec $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-4x+3y) \\ y' = \frac{1}{5}(3x+4y). \end{cases}$

1) Soit $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$; $f(M_1) = M'_1(x'_1,y'_1)$; $f(M_2) = M'_2(x'_2,y'_2)$.
On a : $M_1M_2^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$.
Calculons : $M'_1M'^2_2 = (x'_2-x'_1)^2 + (y'_2-y'_1)^2 = [\frac{1}{5}(-4x_2+3y_2) - \frac{1}{5}(-4x_1+3y_1)]^2 + [\frac{1}{5}(3x_2+4y_2) - \frac{1}{5}(3x_1+4y_1)]^2$

$M'_1M'^2_2 = \frac{1}{25}[16(-x_2+x_1)^2 + 9(y_2-y_1)^2 + 24(-x_2+x_1)(y_2-y_1)]$
$+ \frac{1}{25}[9(x_2-x_1)^2 + 16(y_2-y_1)^2 + 24(x_2-x_1)(y_2-y_1)]$

$M'_1M'^2_2 = \frac{1}{25}\cdot 25[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2] = M_1M_2^2 \Rightarrow f$ est une isométrie

2) $\Delta = \text{Inv} f = \{M \in \mathcal{P} \mid f(M) = M' = M\}$ pour $x' = x$ et $y' = y$,
on obtient : $\begin{cases} 5x = -4x+3y \\ 5y = 3x+4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3x-y) = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$
Δ est la droite d'équation : $y = 3x$ de vecteur normal $\vec{n} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

* $\forall M \notin \Delta$: $\overrightarrow{MM'} \begin{vmatrix} X = x'-x = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - x = \frac{3}{5}(-3x+y) = 3\cdot\lambda \\ Y = y'-y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - y = -\frac{1}{5}(-3x+y) = -\lambda. \end{vmatrix}$
c. à. d. $\overrightarrow{MM'} = \lambda(3\vec{i} - \vec{j})$ $\lambda \in \mathbb{R}$; $\overrightarrow{MM'} = \lambda\cdot\vec{n}$.

* $I = \text{mil}[M,M'] \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x+x') = \frac{1}{2}(-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + x) = \frac{1}{10}(x+3y) \\ y_I = \frac{1}{2}(y+y') = \frac{1}{2}(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + y) = \frac{3}{10}(x+3y) \end{cases}$

calculons : $3x_I = \frac{3}{10}(x+3y) = y_I \Rightarrow I \in \Delta$.

* Il en résulte que f est la réflexion d'axe Δ.

3) $g: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $M(x,y) \mapsto M_1(x_1,y_1)$ g est la réflexion d'axe D (de vecteur normal $\vec{n} = 3\vec{i} - \vec{j}$).

* $\overrightarrow{MM_1}$ et $\vec{n}_1$ sont col. $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{MM_1}, \vec{n}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - x & 3 \\ y_1 - y & -1 \end{vmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow -x_1 + x - 3y_1 + 3y = 0 \Leftrightarrow x_1 + 3y_1 = x + 3y$ (1)

* $\text{mil}[M,M_1] \in D \Leftrightarrow 3\cdot\frac{1}{2}(x_1+x) - \frac{1}{2}(y_1+y) + 1 = 0$ $|\cdot 2$
$\Leftrightarrow 3x_1 - y_1 = -3x + y - 2$ (2).

Système : $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 3y_1 = x + 3y \\ 3x_1 - y_1 = -3x + y - 2 \end{cases}$

$(1) \to$ $x_1 = -3y_1 + x + 3y$
$(2) \to$ $3(-3y_1 + x + 3y) - y_1 = -3x + y - 2$
$10y_1 = 6x + 8y + 2$
$y_1 = \frac{1}{5}(3x + 4y + 1)$
$(1) \to$ $x_1 = -\frac{3}{5}(3x + 4y + 1) + x + 3y$

d'où l'expression analytique de la réflexion g :
$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(-4x + 3y - 3) \\ y_1 = \frac{1}{5}(3x + 4y + 1). \end{cases}$

4) $f : \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-4x+3y) \\ y' = \frac{1}{5}(3x+4y) \end{cases}$ $\qquad g : \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(-4x+3y) - \frac{3}{5} \\ y_1 = \frac{1}{5}(3x+4y) + \frac{1}{5} \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x_1 = x' - \frac{3}{5} \\ y_1 = y' + \frac{1}{5} \end{cases}$ c.à.d. $g = h \circ f$ où h est la translation de vecteur $\vec{u} = -\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{1}{5}\vec{j}$.

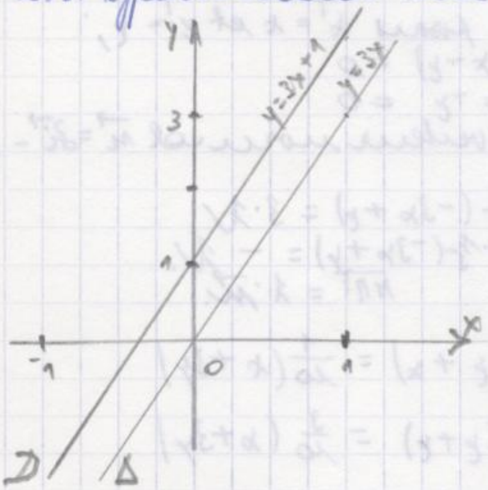
Ou bien : $g = h\circ f \iff g \circ f^{-1} = h \iff g \circ f = h$

avec : $f : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$ et $g : M'(x',y') \mapsto M_1(x_1,y_1)$

$$x_1 = \frac{1}{5}(-4x'+3y'-3) = \frac{1}{5}\left[-\frac{4}{5}(-4x+3y) + \frac{3}{5}(3x+4y) - 3\right] = \frac{1}{25}(25x + 0.y) - \frac{3}{5} = x - \frac{3}{5}$$

$$y_1 = \frac{1}{5}(3x'+4y'+1) = \frac{1}{5}\left[\frac{3}{5}(-4x+3y) + \frac{4}{5}(3x+4y) + 1\right] = \frac{1}{25}(0.x + 25y) + \frac{1}{5} = y + \frac{1}{5}$$

h est effectivement une translation de vecteur $\vec{u} = \frac{1}{5}(-3\vec{i} + \vec{j})$.



(La composée de 2 réflexions d'axes parallèles est une translation de vecteur $\vec{u}$ avec $\frac{1}{2}\cdot\|\vec{u}\|$: distance entre les 2 axes).

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{9+1}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \simeq 0{,}63$; $\frac{1}{2}\|\vec{u}\| \simeq 0{,}32$.

En effet, calculons la distance de Δ à D.
Éq. normale de D : $\frac{3x - y + 1}{\sqrt{9+1}} = 0$

$$d(D, O) = \frac{3\cdot 0 - 0 + 1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \simeq 0{,}32.$$

III

$S : P \to P$
$M(z) \mapsto M'(z')$ tel que : $z' = (1 - i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(-1+i)$ (1).

1) $z' = 2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot z + \sqrt{3}(-1+i)$: S est la similitude de rapport 2, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre $A(z_A)$ tel que : $z_A = (1 - i\sqrt{3})z_A + \sqrt{3}(-1+i)$

$\iff (1 - 1 + i\sqrt{3})\cdot z_A = \sqrt{3}(-1+i)$

$\iff z_A = 1 - \frac{1}{i} = 1 + i$ donc $A(1,1)$.

$\Rightarrow S = \text{Sim}(A, 2, -\frac{\pi}{3})$.

2) $R = \text{Rot}(\Omega, \frac{3\pi}{4})$. $\quad M' = R(M) \quad \Omega(1+i)$ c.à.d. $A = \Omega$.

$z' - 1 - i = \exp(3i\frac{\pi}{4})(z - 1 - i)$

$z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(-1)(1+i)$

$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z + \sqrt{2} + 1 + i$ (2)

3) $f = R\circ S$ est la similitude de centre Ω, de rapport $1\cdot 2 = 2$ et d'angle : $-\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$. (3)

4) Expression analytique complexe :

$z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z' + \sqrt{2} + 1 + i = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\left[(1 - i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(-1+i)\right] + \sqrt{2} + 1 + i$

$z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i\sqrt{3} + i + \sqrt{3})z + \frac{\sqrt{6}}{2}(-2i) + \sqrt{2} + 1 + i$

$z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(-1+\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})\right]\cdot z + (\sqrt{2}+1) + i(1 - \sqrt{6})$ (4)

5) Comparons (3) et (4) :

$$2\cdot e^{i\frac{5\pi}{12}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\sqrt{3}) + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}).$$

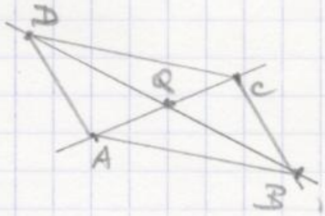
$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \simeq 0{,}26\ ; \qquad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \simeq 0{,}97.$$

IV

1) Soit $Q = \text{bar}\{(A,1)(C,1)\} \Leftrightarrow 1\cdot\vec{QA} + 1\cdot\vec{QC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{QA} + \vec{QA} + \vec{AC} = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \vec{QA} = -\frac{1}{2}\cdot\vec{AC}$

$\Leftrightarrow Q = \text{mil}[A,C]$.



$D = \text{bar}\{(A,1)(C,1)(B,-1)\} = \text{bar}\{(Q,2)(B,-1)\}$

$\Leftrightarrow 2\cdot\vec{DQ} - 1\cdot\vec{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{DB} = 2\cdot\vec{DQ}$

$\Leftrightarrow Q = \text{mil}[B,D]$

$\Leftrightarrow$ (ABCD) est un #.

En bref :

$D = \text{bar}\{(A,1)(B,-1)(C,1)\} \Leftrightarrow 1\cdot\vec{DA} - 1\cdot\vec{DB} + 1\cdot\vec{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{AD} = -\frac{-1}{1}\cdot\vec{AB} + \frac{1}{1}\cdot\vec{AC} = \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$

$\Leftrightarrow$ (ADCB) est un #.

2) # (ABCD). $\qquad E = \{M \in \mathcal{P} \ / \ \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = BD\}$.

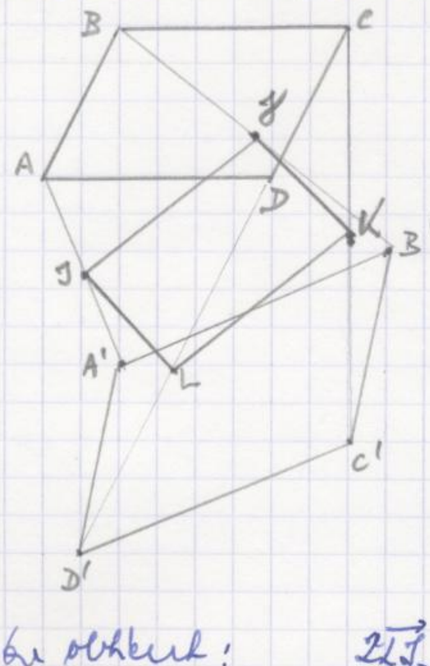
On a : $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MD} + \vec{DA} - \vec{MD} - \vec{DB} + \vec{MD} + \vec{DC} = \vec{MD} + \overbrace{(\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC})}^{\vec{0}} = \vec{MD}$

Donc : $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = BD \Leftrightarrow \|\vec{MD}\| = BD$

$\Leftrightarrow DM = DB$

c.à.d. E est le cercle de centre D et de rayon DB.

3)



(ABCD) est un # $\Leftrightarrow D = \text{bar}\{(A,1)(B,-1)(C,1)\}$ (1)

(A'B'C'D') est un # $\Leftrightarrow D' = \text{bar}\{(A',1)(B',-1)(C',1)\}$ (2).

(1) $\Leftrightarrow \vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$

(2) $\Leftrightarrow \vec{D'A'} - \vec{D'B'} + \vec{D'C'} = \vec{0}$ $\quad\Big|\ (+)$

$(\vec{DA} + \vec{D'A'}) - (\vec{DB} + \vec{D'B'}) + (\vec{DC} + \vec{D'C'}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{LA} - \vec{LD} + \vec{LA'} - \vec{LD'} - \vec{LB} + \cancel{\vec{LD}} - \vec{LB'} + \cancel{\vec{LD'}} + \vec{LC} - \cancel{\vec{LD}} + \vec{LC'} - \cancel{\vec{LD'}} = \vec{0}$

$L = \text{mil}[D,D'] \Leftrightarrow \vec{LD} + \vec{LD'} = \vec{0}$

$I = \text{mil}[A,A'] \Leftrightarrow 2\vec{LI} = \vec{LA} + \vec{LA'}$

$J = \text{mil}[B,B'] \Leftrightarrow 2\vec{LJ} = \vec{LB} + \vec{LB'}$.

$K = \text{mil}[C,C'] \Leftrightarrow 2\vec{LK} = \vec{LC} + \vec{LC'}$

On obtient : $2\vec{LI} - 2\cdot\vec{LJ} + 2\cdot\vec{LK} = \vec{0} \qquad \Big|\ :2$

$\Leftrightarrow 1\cdot\vec{LI} - 1\cdot\vec{LJ} + 1\cdot\vec{LK} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow L = \text{bar}\{(I,1)(J,-1)(K,1)\}$.

$\Leftrightarrow$ (IJKL) est un #.