Examen de fin d'études secondaires
Section B. Mathématiques I A Septembre 2000

Question 1 :

Démontrer le théorème suivant :

Soit O un point du plan. Une isométrie fixant O est Id_P ou une réflexion dont l'axe passe par O ou une rotation de centre O.

[15 pts]

Question 2 :

Le plan P étant muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'application f du plan dans lui –même qui au point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ fait correspondre le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-4x+3y) \\ y' = \frac{1}{5}(\ 3x+4y) \end{cases}.$$

1) Démontrer que f est une isométrie du plan.
2) Déterminer l'ensemble Δ des points invariants par f. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.
3) Etablir l'expression analytique de la réflexion g dont l'axe est la droite D : $y = 3x+1$.
4) En comparant les expressions analytiques de f et de g, montrer que $g = h \circ f$ où h est une transformation simple que l'on caractérisera. En déduire la nature de l'application $g \circ f$.

[4+3+4+3 = 14 pts]

Question 3 :

Le plan P étant muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application S du plan dans lui –même qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = (1-i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(-1+i).$$

1) Déterminer la nature de S et ses éléments caractéristiques.

Tourner s.v.p.

2) Etablir l'expression analytique complexe de la rotation R de centre $\Omega(1,1)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}(2\pi)$.
3) Soit $f = R \circ S$. Sans établir l'expression analytique complexe de *f*, déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.
4) Etablir l'expression analytique complexe de *f*.
5) Déduire de 3) et de 4) les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$.

[5 x 3 = 15 pts]

Question 4 :

Soient dans le plan *P* quatre points A, B, C et D distincts deux à deux.

1) Démontrer que (ABCD) est un parallélogramme si, et seulement si, D est le barycentre du système {(A ;1),(B ;-1),(C ;1)}.
2) On suppose que (ABCD) est un parallélogramme. Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = BD$.

On considère maintenant dans le plan deux parallélogrammes (ABCD) et (A'B'C'D'), ainsi que les milieux I, J, K et L des segments [AA'], [BB'], [CC'] et [DD'] respectivement.

3) Montrer que L est le barycentre des points I, J et K affectés de coefficients que l'on précisera. En déduire que (IJKL) est également un parallélogramme. (N.B. : on pourra utiliser le résultat démontré sub 1) !)
4) Soient O, P et Q les centres respectifs des parallélogrammes (IJKL), (ABCD) et (A'B'C'D'). Démontrer que O est le milieu de [PQ].

[3+3+5+5 = 16 pts]

René Krier, LMRL