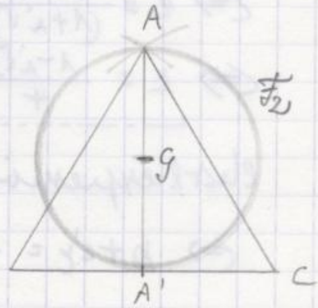
Examen de fin d'études secondaires.
Section $\boxed{B}$ Math 1A. Septembre 2001.



II

1° $G = \text{bar}\{(A,2)(B,1)(C,1)\} \Leftrightarrow 2\vec{GA} + 1\cdot\vec{GB} + 1\cdot\vec{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{4}(\vec{AB}+\vec{AC})$

$\Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{1}{4}\cdot 2\vec{AA'} = \frac{1}{2}\vec{AA'}$

2° $M \in F_k \Leftrightarrow 2MA^2 + MB^2 + MC^2 = ka^2$

$\Leftrightarrow 2(\vec{MG}+\vec{GA})^2 + (\vec{MG}+\vec{GB})^2 + (\vec{MG}+\vec{GC})^2 = ka^2$

$\Leftrightarrow 4\vec{MG}^2 + 2\vec{MG}\underbrace{(2\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC})}_{\vec{0}} + 2\vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2 = ka^2$

$\Leftrightarrow 4GM^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2 = ka^2 \qquad (*)$

Or : $AA' = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $GA = \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{4}a\sqrt{3}$; $GA^2 = \frac{3a^2}{16}$.

$GB^2 = GC^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{16} = \frac{7a^2}{16}$

$(*) \Leftrightarrow 4GM^2 + \frac{3a^2}{8} + \frac{7a^2}{8} = ka^2 \Leftrightarrow 4GM^2 = (k - \frac{5}{4})\cdot a^2$

$\Leftrightarrow GM^2 = \frac{4k-5}{16}\cdot a^2$

Discussion : $k < \frac{5}{4}$: $F_k = \emptyset$
$k = 5/4$: $F_k = \{G\}$
$k > 5/4$: $GM = \frac{1}{4}\sqrt{4k-5}\,a$; $F_k = \mathcal{C}(G ; \frac{\sqrt{4k-5}}{4}\cdot a)$

$F_2 = \mathcal{C}(G, \frac{\sqrt{3}}{4}a) = \mathcal{C}(G, GA)$.

III

$f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$
$M(z) \mapsto M'(z')$ avec $z' = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i)$

1° $|1+i\sqrt{3}| = 2$; $\arg(1+i\sqrt{3}) = \theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$;

M est invariant par $f \Leftrightarrow M' = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow (\cancel{1}-\cancel{1}-i\sqrt{3})z = \sqrt{3} - i\sqrt{3} \Leftrightarrow z_\Omega = \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = 1+i$

$f = \text{sim}(\Omega, 2, \pi/3)$ avec $\Omega(1+i)$.

2° $\Omega M^2 = |z-1-i|^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2+y^2-2x-2y+2$.

$\Omega M'^2 = |z'-1-i|^2 = |(1+i\sqrt{3})z + (\sqrt{3}-1) - (1+\sqrt{3})i|$

$= |(1+i\sqrt{3})(x+iy) + (\sqrt{3}-1) - (1+\sqrt{3})i|^2$

$= (x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3}x + y - 1 - \sqrt{3})^2$

$= x^2 + 3y^2 + 4 - \cancel{2xy\sqrt{3}} + \cancel{2x\sqrt{3}} - 2x - 6y + \cancel{2y\sqrt{3}} - \cancel{2\sqrt{3}} + 3x^2 + y^2 + 4$
$+ \cancel{2xy\sqrt{3}} - \cancel{2x\sqrt{3}} - 6x - 2y - \cancel{2y\sqrt{3}} + \cancel{2\sqrt{3}}$

$= 4x^2 + 4y^2 - 6x - 6y + 8$

$MM'^2 = |z'-z|^2 = |i\sqrt{3}z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}|^2 = |i\sqrt{3}x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} - i\sqrt{3}|^2$

$= 3 + 3y^2 - 6y + 3x^2 + 3 - 6x = 3x^2 + 3y^2 - 6x - 6y + 6$.

On constate que : $MM'^2 + \Omega M^2 = \Omega M'^2$; donc le $\Delta(\Omega M M')$ est rectangle en M.

3) expression analytique de f^{-1} : $z' = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow (1+i\sqrt{3})z = z' - \sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow z = \frac{(1-i\sqrt{3}) \cdot z'}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} + \frac{(-\sqrt{3}+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}$

$\Leftrightarrow z = \frac{1-i\sqrt{3}}{4} \cdot z' + \frac{3-\sqrt{3}}{4} + i \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{4}$

C'est l'expression analytique complexe de f^{-1}.

$\Leftrightarrow x+iy = \frac{1-i\sqrt{3}}{4}(x'+iy') + \frac{1}{4}(3-\sqrt{3}) + i\frac{1}{4}(3+\sqrt{3})$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}x' + \frac{1}{4}\sqrt{3}y' + \frac{1}{4}(3-\sqrt{3}) \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{4}y' + \frac{1}{4}y' + \frac{1}{4}(3+\sqrt{3}) \end{cases}$

4) Équation $D' = f(D)$.

$M' = f(M) \in D' \Leftrightarrow f^{-1}[M'(x',y')] = M(x,y) \in D$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x' - \frac{1}{4}\sqrt{3}y' - \frac{1}{4}(3-\sqrt{3}) - \frac{1}{4}3\sqrt{3}x' + \frac{3}{4}y' + \frac{1}{4}(9+3\sqrt{3}) - 5 = 0$

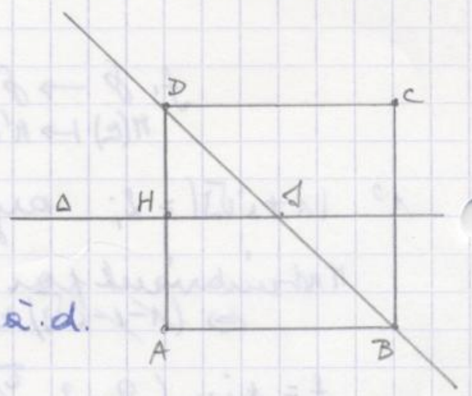
$\Leftrightarrow (-1-3\sqrt{3})x' + (3-\sqrt{3})y' - 14 + 4\sqrt{3} = 0$

5) centre de $\mathscr{C}$: $A(0;\sqrt{3})$.
rayon de $\mathscr{C}$: 3 car $x^2 + (y^2 - 2\sqrt{3}\cdot y + 3) = 9$

$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 3^2$

$f(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'(A';6)$ avec affixe de A' : $aff(A') = (1+i\sqrt{3})i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i\sqrt{3} = -3+\sqrt{3}$.

IV



1) $t = t_{\vec{DA}}$ $\quad r_1 = rot(D, \frac{\pi}{2})$
$r_2 = rot(A, \frac{\pi}{2})$.

a) $f = t \circ r_1$

f est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$; c.à.d. une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit $\Delta = t_{\frac{1}{2}\vec{DA}}((DC))$; $\quad t_{\vec{DA}} = S_\Delta \circ S_{(DC)}$

$rot(D, -\frac{\pi}{4})(DC) = (DB)$; $\quad r_1 = S_{(DC)} \circ S_{(DB)}$

Donc : $f = S_\Delta \circ \underbrace{S_{(DC)} \circ S_{(DC)}}_{id_P} \circ S_{(DB)} = rot(J ; \frac{\pi}{2})$.

b) $g = r_2 \circ f = rot(A, \frac{\pi}{2}) \circ rot(J, \frac{\pi}{2})$.

$g(D) = (r_2 \circ f)(D) = r_2[f(D)] = r_2(A) = A$.

g est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, donc une symétrie centrale (rotation d'angle π) ; $H = mil[D,A]$.

$g = S_H$

2°

$$f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}, \quad M(x,y) \mapsto M'(x',y') \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}.$$

a) $\mathrm{Inv}\, f = \{M(x,y) \in \mathcal{P} \,/\, f(M) = M' = M\}$; pour $x' = x$ et $y' = y$.

$$\begin{cases} 2x = x + y\sqrt{3} + 2 \\ 2y = x\sqrt{3} - y - 2\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x - y\sqrt{3} - 2 = 0 \\ \sqrt{3}(x - y\sqrt{3} - 2) = 0 \end{cases}$$

$\mathrm{Inv}\, f = D_1$ d'équation $x - y\sqrt{3} + 2 = 0$ de vecteur normal $\vec{u}(1, \sqrt{\;}$

b.) $\overrightarrow{MM'}(X, Y)$ avec $\begin{cases} X = x' - x = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 = \lambda \\ Y = y' - y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y - \sqrt{3} = \lambda\sqrt{3}. \end{cases}$

Donc : $(MM') \perp D_1$.

c) $H = $ mil $[M, M']$: $\begin{cases} x_H = \frac{1}{2}(x + x') = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{1}{2} \\ y_H = \frac{1}{2}(y + y') = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$H \in D_1$ car $-\frac{3}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{3}{2} + 2 \equiv 0$.

d) $\left.\begin{array}{l} \mathrm{Inv}\, f = D_1 \\ (MM') \perp D_1 \\ \text{mil}[M, M'] \in D_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ f est la symétrie orthogonale d'axe D_1.