Examen de fin d'études secondaires.
Section $\boxed{B}$ Mathématiques I BC juin 2000.

I

1) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
$z \mapsto z' = \frac{2\bar z - 3i}{i\bar z - 3}$ avec $z \neq 3i$.

* Posons : $z = x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2 - \{(0,3)\}$ et $z' = x'+iy'$.

$z' = \frac{2\bar z-3i}{i\bar z-3} \Leftrightarrow x'+iy' = \frac{2(x-iy)-3i}{i(x-iy)-3} = \frac{2x+i(-2y-3)}{(y-3)+ix}\cdot\frac{(y-3)-ix}{(y-3)-ix}$

$\Leftrightarrow x'+iy' = \frac{(2xy-6x-2xy-3x)+i(-2x^2-2y^2+6y-3y+9)}{(y-3)^2+x^2}$

$\Leftrightarrow x'+iy' = \frac{-9x}{x^2+(y-3)^2} + i\cdot\frac{-2x^2-2y^2+3y+9}{x^2+(y-3)^2}$

* $S_1 = \{M(z) / z'\in\mathbb{R}_+\}$; $z'\in\mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \begin{cases}\text{Im } z' = y' = 0\\ \text{Re}(z') = x' \geq 0\end{cases}$

$z'\in\mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-\frac32 y-\frac92=0\\ -9x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+(y-\frac34)^2=\frac{81}{16}\\ x\leq 0\end{cases}$

On obtient l'équation d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(0;\frac34)$ et $r=\frac94$.
$S_1$ est le demi-cercle $\overset{\frown}{ACB}$ ouvert en A et fermé en B;
(car $A(0,3)\in\mathcal{C}$).

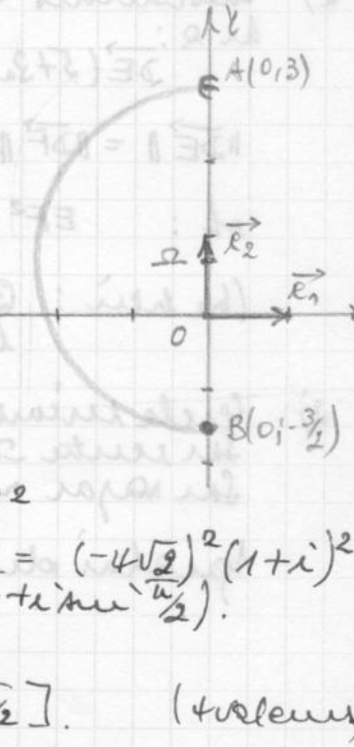
* $S_2 = \{M(z) / \arg z' = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\}$

$\arg z' = \frac\pi2\ [2\pi] \Leftrightarrow \begin{cases}\text{Re}(z')=x'=0\\ \text{Im}(z')=y'>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ -2y^2+3y+9>0\end{cases}$ $\Delta=81$; $y_1=3$; $y_2=-\frac32$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ -\frac32<y<3\end{cases}$

équations d'un segment ouvert
$S_2 = ]A;B[$.




2) $z = \sqrt{4-2\sqrt2} - i\sqrt{4+2\sqrt2}$

a) $z^4 = (z^2)^2 = [4-2\sqrt2 - 2i\sqrt{(4-2\sqrt2)(4+2\sqrt2)} - (4+2\sqrt2)]^2$
$= (-4\sqrt2 - 2i\sqrt{16-8})^2 = (-4\sqrt2-4i\sqrt2)^2 = (-4\sqrt2)^2(1+i)^2$
$= 32\cdot 2i = 64i = 64\exp(i\frac\pi2) = 64(\cos\frac\pi2 + i\sin\frac\pi2)$.

b.) $|z^4| = |z|^4 = 64 \Rightarrow |z| = \sqrt[4]{64} = (2^6)^{1/4} = 2^{3/2} = 2\sqrt2$.
$\arg z^4 = 4\arg z = \frac\pi2\ [2\pi] \Rightarrow \arg z = \frac\pi8\ [\frac\pi2]$. (4 valeurs)

Or: $\text{Re}(z)>0$ et $\text{Im}(z)<0 \Rightarrow \arg z\in\ ]-\frac\pi2,0[\ [2\pi]$.
Donc! $\arg z = -\frac{3\pi}{8}\ [2\pi]$. (1 seule valeur).

c) $\cos\frac\pi8 = \sin\frac{3\pi}8 = -\sin(-\frac{3\pi}8) = -\frac{-\sqrt{4+2\sqrt2}}{2\sqrt2} = \frac12\cdot\sqrt{\frac{4+2\sqrt2}{2}} = \frac12\sqrt{2+\sqrt2}$

$\sin\frac\pi8 = \cos\frac{3\pi}8 = \cos(-\frac{3\pi}8) = \frac{\sqrt{4-2\sqrt2}}{2\sqrt2} = \frac12\cdot\sqrt{\frac{4-2\sqrt2}2} = \frac12\sqrt{2-\sqrt2}$

II

$P(z) = z^3-(2+i)z^2+(11-4i)z+30-35i$ $(z\in\mathbb{C})$.

1) * $P(a+i)=0 \Leftrightarrow (a^3+3a^2i-3a-i)-(2+i)(a^2+2ai-1)$
$+(11-4i)(a+i)+30-35i = 0$

$\Leftrightarrow (a^3-3a-2a^2+2+2a+11a+4+30)$
$+i(3a^2-1-4a-a^2+1+11-4a-35) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3-2a^2+10a+36=0 & (1)\\ 2a^2-8a-24=0 & (2)\end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow a^2-4a-12=0 \Leftrightarrow (a-6)(a+2)=0 \Leftrightarrow a=6$ ou $a=-2$

$a=-2$ dans $(1)$ : $-8-8-20+36=0$.

c.à.d $z_0=-2+i$ est racine de $P(z)$ ; $P(z)$ est divisible par $z-z_0=z+2-i$.

* Schéma de Horner :

| $P(z)$ | $1$ | $-2-i$ | $11-4i$ | $30-35i$ |
|---|---|---|---|---|
| $z_0=-2+i$ | | $-2+i$ | $8-4i$ | $-38+16i$ $+8+19i$ |
| $Q(z)$ | $1$ | $-4$ | $19-8i$ | $0$ |

Donc : $P(z)=(z+2-i)\cdot[z^2-4z+(19-8i)]$.

* $P(z)=0 \Leftrightarrow z=-2+i$ ou $z^2-4z+19-8i=0$

discriminant réduit : $\Delta'=4-19+8i=-15+2\cdot4i=[\pm(1+4i)]^2$.

$P(z)=0 \Leftrightarrow z_0=-2+i$ ou $z_1=2+1+4i=3+4i$ ou $z_2=2-1-4i=1-4i$.

2) Considérons les points $D(-2+i)$ ; $E(3+4i)$ ; $F(1-4i)$.

on a : $\vec{DE}(5+3i)$ ; $\vec{DF}(3-5i)$ ; $\vec{EF}(-2-8i)$.

$\|\vec{DE}\|=\|\vec{DF}\|=\sqrt{34}$ ; $\|\vec{EF}\|=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$

et : $EF^2=DE^2+DF^2$ ; le $\Delta$ est rectangle et isocèle en $D$.

(ou bien : $(3-5i)i=3i+5$ la rotation $r(D,\frac{\pi}{2})$ donne de $F$ l'image $E$.)

3) Cercle circonscrit au $\Delta(DEF)$.

Son centre $\Omega$ est le milieu de $[E,F]$ : $z_\Omega=\frac{1}{2}(z_E+z_F)=2$.

Son rayon $r$ est $r=\frac{1}{2}EF=\sqrt{17}$.

Équation du cercle : $M(z)\in\mathcal{C}(\Omega,r) \Leftrightarrow |z-2|=\sqrt{17}$ | carré.

$\Leftrightarrow (z-2)(\bar{z}-2)=17$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-2(z+\bar{z})-13=0$.

III

RON$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ $\mathcal{C}_m$ $(m+2)x^2+(4-m)y^2+2mx-4my=0$ $(m\in\mathbb{R})$

* $AB=(m+2)(4-m)$.

Tableau :

| $m$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $AB$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\mathcal{C}_m$ | | $\mathcal{H}$ | $\mathcal{P}$ | $\mathcal{E}$ | $\mathcal{P}$ | $\mathcal{H}$. | |

* $\boxed{m=-2}$

RON$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ : $\mathcal{C}_{-2}$ : $6y^2-4x+8y=0 \iff y^2+\frac{4}{3}y=\frac{2}{3}x$

$\iff y^2+\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}=\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}$

$\iff (y+\frac{2}{3})^2=\frac{2}{3}(x+\frac{2}{3})$.

Effectuons une translation des axes en $S(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3})$.
Équations de translation : $\begin{cases} x=X-\frac{2}{3}\\ y=Y-\frac{2}{3}\end{cases} \iff \begin{cases} X=x+\frac{2}{3}\\ Y=y+\frac{2}{3}.\end{cases}$

RON$(S,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ : $\mathcal{C}_{-2}$ : $Y^2=\frac{2}{3}X$ $\mathcal{C}_{-2}$ est une parabole véritable de sommet $S$ d'axe $(S,\vec{\imath})$
tournant sa concavité vers les $x$ positifs (car $x\geq-\frac{2}{3}$).
Paramètre : $p=\frac{1}{3}$ ; foyer $F(\frac{1}{6},0)$.

$\boxed{m=4}$

RON$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ : $\mathcal{C}_4$ : $6x^2+8x-16y=0 \iff x^2+\frac{4}{3}x=\frac{8}{3}y$

$\iff x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=\frac{8}{3}y+\frac{4}{9}$

$\iff (x+\frac{2}{3})^2=\frac{8}{3}(y+\frac{1}{6})$

Effectuons une translation des axes en $S(-\frac{2}{3};-\frac{1}{6})$.
Équations de translation : $\begin{cases} x=X-\frac{2}{3}\\ y=Y-\frac{1}{6}\end{cases} \iff \begin{cases} X=x+\frac{2}{3}\\ Y=y+\frac{1}{6}.\end{cases}$

RON$(S,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ : $\mathcal{C}_4$ : $X^2=\frac{8}{3}Y$. $\mathcal{C}_4$ est une parabole véritable de sommet $S$ d'axe $(S,\vec{\jmath})$
tournant sa concavité vers les $y$ positifs, car $y\geq-\frac{1}{6}$.
Paramètre : $p=\frac{4}{3}$ ; Foyer $F(0,\frac{2}{3})$.

* $\boxed{\forall m\in\mathbb{R}-\{-2,4\}.}$

$\mathcal{C}_m$ est une conique à centre (éventuellement dégénérée), de centre : $\Omega_m\left(\frac{-m}{m+2};\frac{2m}{4-m}\right)$.
Recherche du centre $\Omega_m$ et équation réduite :

RON$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ : $(m+2)\left[x^2+2\cdot\frac{m}{m+2}x+\frac{m^2}{(m+2)^2}\right]+(4-m)\left[y^2-2\cdot\frac{2my}{4-m}+\frac{4m^2}{(4-m)^2}\right]=\frac{m^2}{m+2}+\frac{4m^2}{4-m}$

$\iff (m+2)\left[x+\frac{m}{m+2}\right]^2+(4-m)\left[y-\frac{2m}{4-m}\right]^2=\frac{m^2(4-m+4m+8)}{(m+2)(4-m)}$

$\iff (m+2)\cdot\left(x+\frac{m}{m+2}\right)^2+(4-m)\cdot\left(y-\frac{2m}{4-m}\right)^2=\frac{3m^2(4+m)}{(m+2)(4-m)}$

Valeurs remarquables : $m=0$ et $m=-4$.

$\boxed{m=0}$ $\mathcal{C}_0 : \quad 2x^2+4y^2=0 \iff x=y=0.$

$\mathcal{C}_0$ est une ellipse dégénérée et réduite en $\Omega_0 = O$
c'est une ellipse-point.

$\boxed{m=-4}$ $\mathcal{C}_{-4} :$
$$\begin{aligned}
& -2x^2+8y^2-8x+16y=0\\
\iff & -2(x^2+4x+4)+8(y^2+2y+1) = -8+8\\
\iff & (x+2)^2-4\cdot(y+1)^2=0\\
\iff & (x+2y+4)(x-2y)=0.\\
\iff & x+2y+4=0 \quad \text{ou} \quad x-2y=0.
\end{aligned}$$

$\mathcal{C}_{-4}$ est une hyperbole dégénérée en la réunion des 2 droites $\Delta_1 : x+2y+4=0$ et $\Delta_2 : x=2y$.

Translation des axes en $\Omega_m\left(-\frac{m}{m+2} ; \frac{2m}{4-m}\right)$.

Équations de translation : $\begin{cases} x = X - \frac{m}{m+2} \\ y = Y + \frac{2m}{4-m} \end{cases} \iff \begin{cases} X = x + \frac{m}{m+2} \\ Y = y - \frac{2m}{4-m} \end{cases}$

$\mathrm{RON}(\Omega_m, \vec{i}, \vec{j})$ : $$\frac{X^2}{\frac{3m^2(4+m)}{(m+2)^2(4-m)}} + \frac{Y^2}{\frac{3m^2(4+m)}{(m+2)(4-m)^2}} = 1$$

$\forall m \in \mathbb{R}-\{-4,-2,0,4\}$ :

* Recherche de l'axe focal. Posons : $A = \frac{3m^2(4+m)}{(m+2)^2(4-m)}$ ; $B = \frac{3m^2(4+m)}{(m+2)(4-m)^2}$

$\forall m \in ]-2,0[\cup]0,4[$.

$$\begin{aligned}
A>B \iff & \frac{3m^2(4+m)}{(m+2)^2(4-m)} > \frac{3m^2(4+m)}{(m+2)(4-m)^2} \\
\iff & \frac{1}{(m+2)^2(4-m)} > \frac{1}{(m+2)(4-m)^2} \\
\iff & \frac{1}{m+2} > \frac{1}{4-m} > 0 \\
\iff & 4-m > m+2 \\
\iff & m < 1
\end{aligned}$$

$\cdot \ \frac{1}{3m^2(4+m)} > 0$

$\cdot \ (m+2)(4-m) > 0$

$\forall m \in ]-\infty ; -4[$ : $A<0$ et $B>0$
$\mathcal{C}_m$ est une hyperbole d'axe $(\Omega_m, \vec{j})$ transverse.

$\forall m \in ]-4 ; -2[$ : $A>0$ et $B<0$
$\mathcal{C}_m$ est une hyperbole d'axe $(\Omega_m, \vec{i})$ transverse.

$\forall m \in ]-2,0[\cup]0,1[$ : $A > B$.
$\mathcal{C}_m$ est une ellipse d'axe focal $(\Omega_m, \vec{i})$

$\forall m \in ]1;4[$ : $A < B$
$\mathcal{C}_m$ est une ellipse d'axe focal $(\Omega_m, \vec{j})$.

| $m$ | $-\infty$ | $-4$ | | $-2$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |
| $B$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $\mathcal{C}_m$ | $\mathcal{H}$ | $\Vert$ | $\mathcal{H}$ | $\Vert$ | $\mathcal{E}$ | $\Vert$ | $\mathcal{E}$ | $\Vert$ | $\mathcal{H}$ | |

* $\boxed{m=1}$ $A = B = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$.
$\mathcal{C}_1$ est le cercle d'équation : $(x+\frac{1}{3})^2+(y-\frac{2}{3})^2 = \frac{5}{9}$

centre $\Omega_1(-\frac{1}{3} ; \frac{2}{3})$, rayon $r = \frac{\sqrt{5}}{3}$.