Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2000
Section B
Branche: **Mathématiques I b,c** juin

Nom et prénom du candidat:
____
____

Question I

1) Dans le plan complexe C rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$, on considère l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par:

$$z' = \frac{2\bar{z} - 3i}{i\bar{z} - 3}, \quad \text{avec } z \neq 3i .$$

Déterminer et représenter graphiquement les ensembles

$$S_1 = \{ M(z) \,/\, z' \in \mathbb{R}_- \} \text{ et } S_2 = \{ M(z) \,/\, \arg z' = \frac{\pi}{2} \ (2\pi) \}.$$

2) Soit le nombre complexe $z = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} - i \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.

a) Calculer z^4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
b) En déduire la forme trigonométrique de z .
c) Déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ et de $\sin\frac{\pi}{8}$.

12+10 = 22 points

Question II

1) Soit le polynôme $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + (11-4i)z + 30 - 35i \quad (z \in C)$.

Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sachant que $P(z)$ admet une racine de la forme $a + i \ (a \in R)$.

2) Le plan complexe C étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$, on considère les points

D, E *et* F dont les affixes respectives sont les racines du polynôme $P(z)$.
Montrer que le triangle DEF est rectangle et isocèle.

3) Etablir dans C l'équation du cercle circonscrit au triangle DEF .

12+3+3 = 18 points

Question III

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormal $\mathfrak{R} = (O;\vec{i};\vec{j})$ on considère la famille de coniques $(C_m)_{m\in R}$ définies par l'équation:

$$C_m : \quad (m+2)x^2 + (4-m)y^2 + 2mx - 4my = 0 \qquad (m \in R)$$

Etudier, suivant les valeurs de m, la nature de C_m .

* Si C_m est une parabole "véritable", préciser le sommet et l'axe focal dans le repère $\mathfrak{R}$, puis donner l'équation réduite de C_m dans un repère approprié.
* Si C_m est une conique à centre, préciser le centre et l'axe focal dans le repère $\mathfrak{R}$.
  Caractériser le cercle de cette famille de coniques.

20 points