Examen de fin d'études secondaires.
Section $\boxed{B}$. Maths I BC juin 2001.

I

1° $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \mapsto z' = \dfrac{3z+1}{z+i}$ $\qquad$ dom $f = \mathbb{C} - \{-i\}$.

a) $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z'} = z' \Leftrightarrow \dfrac{3\bar{z}+1}{\bar{z}-i} = \dfrac{3z+1}{z+i} \Leftrightarrow (3\bar{z}+1)(z+i) = (3z+1)(\bar{z}-i)$

$\Leftrightarrow 3z\bar{z} + 3i\bar{z} + z + i = 3z\bar{z} - 3iz + \bar{z} - i$

$\Leftrightarrow z - \bar{z} + 3i(z+\bar{z}) + 2i = 0$

$\Leftrightarrow 2iy + 3i\,2x + 2i = 0$

$\Leftrightarrow 3x + y + 1 = 0$

posons : $z = x+iy$ (+), $\bar{z} = x - iy$ (−) ; $z+\bar{z} = 2x$; $z - \bar{z} = 2iy$.

L'ensemble des points cherchés est la droite d'équation $3x+y+1=0$ privée du point de coordonnées $(0;-1)$ car $z \neq -i \Leftrightarrow (x,y) \neq (0,-1)$

b) Si $z = x+iy$ alors $z' = \dfrac{3(x+iy)+1}{x+i(y+1)} \cdot \dfrac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)} = \dfrac{(3x^2+3y^2+x+3y) - (3x+y+1)}{x^2+(y+1)^2}$

$\arg z' \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow z' = iy'$ avec $y' < 0$

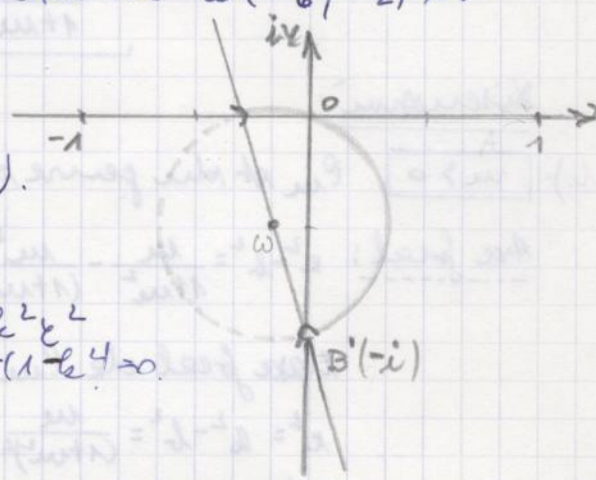
$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3y^2+x+3y = 0 & (1) \\ 3x+y+1 > 0 & (2) \end{cases}$

(1) : $3(x^2+y^2) + x + 3y = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{1}{3}x + y = 0$

$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{6})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{10}{36}$

c'est l'équation d'un cercle de centre $\omega(-\frac{1}{6} ; -\frac{1}{2})$ et de rayon : $r = \frac{1}{6}\cdot\sqrt{10}$.

(2) : $3x+y+1=0$ droite.



2° $|z'| = k \Leftrightarrow \dfrac{|1+x+iy|^2}{|1-x-iy|^2} = k^2$; $(x,y) \neq (1,0)$.

$\Leftrightarrow |1+x+iy|^2 = k^2\cdot|1-x-iy|^2$

$\Leftrightarrow (1+x)^2 + y^2 = k^2\cdot[(1-x)^2+y^2]$

$\Leftrightarrow 1+2x+x^2+y^2 = k^2 - 2k^2x + k^2x^2 + k^2y^2$

$\Leftrightarrow (1-k^2)x^2 + (1-k^2)y^2 + 2(1+k^2)x + (1-k^4) = 0$

Si $k=1$ alors $|z'| = k \Leftrightarrow x = 0$.
Si $k \neq 1$ et $k>0$ alors :

$x^2+y^2+2\cdot\dfrac{(1+k^2)}{(1-k^2)}\cdot x + 1 = 0$ $\qquad$ c'est l'équation d'un cercle de centre $\Omega_k\left(-\dfrac{1+k^2}{1-k^2} ; 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{4k^2}{(1-k^2)^2}$ $\qquad$ et de rayon $r_k = \dfrac{2k}{|1-k^2|}$.

II

a) $P(z_0) = 0 \Leftrightarrow a_4z_0^4 + a_3z_0^3 + a_2z_0^2 + a_1z_0 + a_0 = 0$

$\Leftrightarrow a_4\bar{z}_0^4 + a_3\bar{z}_0^3 + a_2\bar{z}_0^2 + a_1\bar{z}_0 + a_0 = 0 \Leftrightarrow P(\bar{z}_0) = 0$.

b) $P_1(\alpha+i) = (\alpha+i)^4 - 6(\alpha+i)^3 + 23(\alpha+i)^2 - 34(\alpha+i) + 26 = 0$

$= (\alpha^4 + 17\alpha^2 + 4 - 6\alpha^3 - 16\alpha) + i(4\alpha^3 + 42\alpha - 18\alpha^2 - 28)$

$P_1(\alpha+i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^4 - 6\alpha^3 + 17\alpha^2 - 16\alpha + 4 = 0 & (1) \\ 4\alpha^3 - 18\alpha^2 + 42\alpha - 28 = 0 & (2) \end{cases}$

(2) admet la solution $\alpha = 1$ qui est aussi solution de (1).

c) c.à.d. $P_1(\alpha+i) = 0 \Rightarrow P_1(\alpha - i) = 0$.

d.) La division fournit l'équation : $z^2-4z+13=0$
dont les solutions sont : $z=2+3i$; $z=2-3i$.

$S_{\mathbb{C}} = \{1+i\,;\ 1-i\,;\ 2+3i\,;\ 2-3i\}$.

III

RON$(O;\vec{i};\vec{j})$: (C_m) $\quad mx^2+(m^2+1)y^2-2my=0 \quad (m\in\mathbb{R})$ (1)

a) * $AB = m(1+m^2)$
$AB=0 \Leftrightarrow m=0$

m		0	
AB	$-$	0	$+$
C_m	$\mathcal{H}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{E}$

* m_0 : C_0 $\quad y^2=0 \Leftrightarrow y=0$ $\quad C_0$ est une parabole dégénérée en 2 droites confondues : $C_0=(Ox)$.

* $\forall m\in\mathbb{R}^*$: C_m est une conique à centre, de centre $\Omega_m\left(0;\ \frac{m}{1+m^2}\right)$.

RON$(O,\vec{i},\vec{j})$: $mx^2+(1+m^2)\left[y^2-2\cdot\frac{m}{1+m^2}\cdot y+\left(\frac{m}{1+m^2}\right)^2\right] = \frac{m^2}{1+m^2}$

$$mx^2+(1+m^2)\cdot\left(y-\frac{m}{1+m^2}\right)^2 = \frac{m^2}{1+m^2} \quad \Big| : m(1+m^2)\neq 0.$$

Translation des axes en $\Omega_m\left(0;\ \frac{m}{1+m^2}\right)$.
Équations de translation : $\begin{cases} x = X \\ y = Y + \frac{m}{1+m^2}. \end{cases}$

RON$(\Omega_m,\vec{i},\vec{j})$: $$\frac{X^2}{\frac{m}{1+m^2}} + \frac{Y^2}{\frac{m^2}{(1+m^2)^2}} = 1$$

Discussion :

b.) $\boxed{m>0}$ C_m est du genre ellipse ; c'est une ellipse véritable de centre Ω_m

Axe focal : $a^2-b^2 = \frac{m}{1+m^2} - \frac{m^2}{(1+m^2)^2} = \frac{m}{1+m^2}\left(1-\frac{m}{1+m^2}\right) = \frac{m}{1+m^2}\cdot\frac{m^2-m+1}{1+m^2} > 0,\ \forall m>$

l'axe focal de C_m est l'axe $(\Omega_m X)$.

$c^2 = a^2-b^2 = \frac{m}{(1+m^2)^2}\cdot(m^2-m+1)$.

Excentricité : $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{m(m^2-m+1)(1+m^2)}{(1+m^2)^2\cdot m}} = \sqrt{\frac{m^2-m+1}{1+m^2}}$

Coordonnées des sommets du grand axe. $\left(\sqrt{\frac{m}{1+m^2}}\ ;\ \frac{m}{1+m^2}\right)$.
(RON$(O,\vec{i},\vec{j})$.) $\left(-\sqrt{\frac{m}{1+m^2}}\ ;\ \frac{m}{1+m^2}\right)$.

c) $\boxed{m<0}$ C_m est du genre hyperbole ; c'est une hyperbole.

(2) $\rightarrow$ $$-\frac{X^2}{\frac{-m}{1+m^2}} + \frac{Y^2}{\left(\frac{m}{1+m^2}\right)^2} = 1$$ l'axe transverse est $(\Omega_m Y)$.

Coordonnées des sommets : $(0,0)$; $\left(0\,;\ \frac{2m}{1+m^2}\right)$
(RON$(O,\vec{i},\vec{j})$)