Examen de fin d'études secondaires
Section $\boxed{B}$. Maths 1 BC septembre 2000.

I

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + (9+10i)z^2 - 2(4+5i)z - 2 + 16i \quad \text{et} \quad P(z) = 0 \quad (J).$$

1° $P(\alpha) = 0$ alors $P(1-\alpha) = 1 - 4\alpha + 6\alpha^2 - 4\alpha^3 + \alpha^4 - 2(1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3) + 9 + 10i$
$- 18\alpha - 20\alpha i + 9\alpha^2 + 10i\alpha^2 - 8 - 10i + 8\alpha + 10\alpha i - 2 + 16i$

$$P(1-\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^3 + (9+10i)\alpha^2 - 8\alpha - 10\alpha i - 2 + 16i = P(\alpha) = 0.$$

2° $z_0 = bi$ est solution de (J)

- $\Leftrightarrow b^4 + 2b^3 i - 9b^2 - 10b^2 i - 8bi + 10b - 2 + 16i = 0$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 9b^2 + 10b - 2 = 0 \\ 2b^3 - 10b^2 - 8b + 16 = 0 \end{cases}$ or $b = 1$ est solution évidente des 2 équations.

- Il en résulte que i et $1-i$ sont racines de $P(z)$; $P(z)$ est donc divisible par $(z-i)(z-1+i)$.

	1	-2	$9+10i$	$-8-10i$	$-2+16i$
		i	$-1-2i$	$-8+8i$	$2-16i$
i	1	$-2+i$	$8+8i$	$-16-2i$	0
		$1-i$	$-1+i$	$16+2i$	
$1-i$	1	-1	$7+9i$	0	

Donc : $P(z) = (z-i)(z-1+i)(z^2 - z + 7 + 9i) = 0$

- Posons : $z^2 - z + (7+9i) = 0$
  Discriminant : $\Delta = 1 - 28 - 36i = -27 - 36i = [\varepsilon(-3+6i)]^2 \quad (\varepsilon^2 = 1)$.
  Donc ! $z_1 = \dfrac{1-3+6i}{2} = -1+3i$ ou $z_2 = \dfrac{1+3-6i}{2} = 2-3i$

Solution de (J) : $S = \{i\,;\, 1-i\,;\, -1+3i\,;\, 2-3i\}$.

3° Considérons dans le plan de Gauß les points A, B, C, D d'affixes respectives i, $1-i$, $-1+3i$, $2-3i$.
Affixe de $\overrightarrow{AC}$: $-1+2i$; Affixe de $\overrightarrow{BD}$: $1-2i$.
Ainsi : $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow (ACBD)$ est un #.

(N.B. En fait les 4 points A, B, C, D sont alignés).

II

1° $Z = 1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha + \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$
$Z = \cos\alpha + 2\cos^2\alpha + i(\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha)$
$Z = \cos\alpha(1 + 2\cos\alpha) + i\sin\alpha(1 + 2\cos\alpha)$
$Z = (1 + 2\cos\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Discussion :

* $1 + 2\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$ ou $\alpha = -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$
dans ce cas : $|Z| = 0$ et $\arg Z$ n'existe pas.

* $1 + 2\cos\alpha > 0 \Leftrightarrow \cos\alpha > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < \alpha < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
$|Z| = 1 + 2\cos\alpha$; et $\arg Z = \alpha\,[2\pi]$.
forme trigonométrique de Z : $Z = (1 + 2\cos\alpha)\cdot e^{i\alpha}$.

* $1+2\cos\alpha<0 \iff \cos\alpha < -\frac{1}{2} \iff \frac{2\pi}{3}+2k\pi < \alpha < \frac{4\pi}{3}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

On a : $Z = -(1+2\cos\alpha)[-\cos\alpha - i\sin\alpha] = -(1+2\cos\alpha)[\cos(\alpha+\pi)+i\sin(\alpha+\pi)]$

$|Z| = -(1+2\cos\alpha)$ et $\arg Z = \alpha+\pi\ [2\pi]$

forme trigonométrique de Z : $Z = -(1+2\cos\alpha)\cdot e^{i(\alpha+\pi)}$.

2° $(-1+i)^7 = [(-1+i)^2]^3(1+i) = (-2i)^3\cdot(-1+i) = (+8i)(-1+i) = 8(-1-i)$

a) Posons : $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)^7 = 4\sqrt{2}(-1-i) = 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i5\pi/4} = 8\cdot e^{\frac{5i\pi}{4}}$

avec $z=\rho e^{i\theta}$

Alors : $z^3 = z_0$ (J) $\iff \begin{cases}\rho^3 = 8\\ 3\theta = \frac{5\pi}{4}+2k\pi\end{cases} \iff \begin{cases}\rho = 2\\ \theta = \frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$ $(k\in\{0,1,2\})$

Solutions de (J) : $z'_0 = 2\cdot e^{\frac{5i\pi}{12}}$; $z'_1 = 2\cdot e^{\frac{13i\pi}{12}}$; $z'_2 = 2\cdot e^{\frac{7i\pi}{4}}$

On a : $b = 2\cdot e^{\frac{7i\pi}{4}} = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1-i)$.

b.) b est solution de (J) c.à.d. $z^3 = b^3 \iff \left(\frac{z}{b}\right)^3 = 1$

donc $\frac{z}{b}$ est une racine cubique de l'unité qui sont $1, j, \bar{j}$.

Alors : $\frac{z}{b} = 1$ ou $\frac{z}{b} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\frac{z}{b} = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z = b = \sqrt{2}(1-i)$ ou $z = b\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $z = b\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

On obtient : $z = b = \sqrt{2}(1-i) = z''_0$

$z = \sqrt{2}(1-i)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i = z''_1$

$z = \sqrt{2}(1-i)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}i = z''_2$

Puisque : $z'_0 = z''_1$ on trouve : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

III

ROU$(O,\vec{i},\vec{j})$: $mx^2+(m+2)y^2-2m(m+1)x+2(m+2)y+m^3-3m=0$ $(m\in\mathbb{R})$.

1° $AB = m(m+2)$

$AB=0 \Leftrightarrow m=0$ ou $m=-2$.

- Tableau :

m	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
AB		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\mathcal{C}_m$		$\mathcal{E}$	$\mathcal{P}$.	$\mathcal{H}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{E}$	

- $m=0$: $\mathcal{C}_0$ $2y^2+4y=0 \Leftrightarrow y(y+2)=0 \Leftrightarrow y=0$ ou $y=-2$.
$\mathcal{C}_0$ est une parabole dégénérée en 2 droites parallèles.
$\mathcal{C}_0 = \mathcal{D}\cup\mathcal{D}'$ avec : $\mathcal{D}$ $y=0$ et $\mathcal{D}'$ $y=-2$.

- $m=-2$: $\mathcal{C}_{-2}$ $-2x^2-4x-2=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.
$\mathcal{C}_{-2}$ est la parabole dégénérée en la droite Δ $x=-1$.

- $\forall m\in\mathbb{R}^*-\{-2\}$, $\mathcal{C}_m$ est une conique à centre, de centre $\Omega_m(m+1, -1)$.

ROU$(O,\vec{i},\vec{j})$:

$m.[x^2-2(m+1)x+(m+1)^2]+(m+2)(y^2+2y+1) = -m^3+3m+m(m+1)^2+m+2$

$\Leftrightarrow m[x-(m+1)]^2+(m+2)(y+1)^2 = 2m^2+5m+2$

Translation des axes en $\Omega_m(m+1,-1)$,

équations de translation : $\begin{cases} x = X+(m+1) \\ y = Y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x-(m+1) \\ Y = y+1 \end{cases}$

ROU$(\Omega_m,\vec{i},\vec{j})$: $m.X^2+(m+2)Y^2 = (m+2)(2m+1)$

la valeur $m=-2$ est à écarter.

- $m=-\frac{1}{2}$: $\mathcal{C}_{-1/2}$ ROU$(O,\vec{i},\vec{j})$: $-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}(y+1)^2=0$ $\quad |.2$

$\Leftrightarrow [\sqrt{3}(y+1)+(x-\frac{1}{2})][\sqrt{3}(y+1)-(x-\frac{1}{2})]=0$.

$\mathcal{C}_{-1/2} = \Delta'\cup\Delta''$ avec Δ' : $x+\sqrt{3}y+\sqrt{3}-\frac{1}{2}=0$
Δ'' : $x-\sqrt{3}y-\sqrt{3}-\frac{1}{2}=0$

- $\forall m\in\mathbb{R}^*-\{-\frac{1}{2};-2\}$ et ROU$(\Omega_m,\vec{i},\vec{j})$:

$$\frac{X^2}{\frac{(m+2)(2m+1)}{m}}+\frac{Y^2}{2m+1}=1$$

c'est l'équation réduite de la conique $\mathcal{C}_m$ à centre.

Tableau :

m	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
m		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$m+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2m+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(m+2)(2m+1)}{m}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$\forall m\in]-\infty;-2[$: $\mathcal{C}_m=\emptyset$.

$\forall m\in]-2,0[$: $\mathcal{C}_m$ est une hyperbole ; $\mathcal{C}_{-1/2}$ est dégénérée

$\forall m\in[0;+\infty[$: $\mathcal{C}_m$ est une ellipse (ou un cercle).

2° Soit $m \in \mathbb{R}^*_+$: $\dfrac{(m+2)(2m+1)}{m} - (2m+1) = \dfrac{(2m+1)(m+2-m)}{m} > 0$

Dans le RON$(\Omega_m, \vec{i}, \vec{j})$, C_m est une ellipse d'axe focal $(\Omega_m X)$.
de sommets : $A\left(\sqrt{\dfrac{(m+2)(2m+1)}{m}} ; 0\right)$, $A'\left(-\sqrt{\dfrac{(m+2)(2m+1)}{m}} ; 0\right)$

$B(0, \sqrt{2m+1})$; $B'(0 ; -\sqrt{2m+1})$

et de foyers : $F\left(\sqrt{\dfrac{2(2m+1)}{m}} ; 0\right)$, $F'\left(-\sqrt{\dfrac{2(2m+1)}{m}} ; 0\right)$.

3° Si $m \in]-2 ; -\frac{1}{2}[$ alors C_m est une hyperbole d'axe transverse $y = -1$.

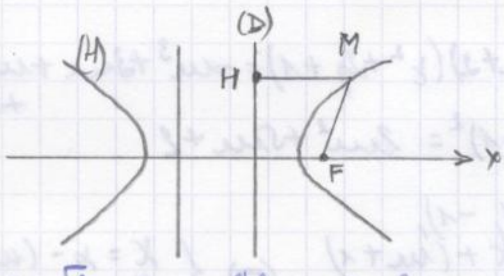
si $m \in]-\frac{1}{2}, 0[$ alors C_m a pour axe transverse $x = m+1$.

$C_{-\frac{1}{2}}$ est une hyperbole dégénérée en 2 droites sécantes : $C_{-\frac{1}{2}} = \Delta' \cup \Delta''$.

équations des asymptotes : $y+1 = \sqrt{\dfrac{-m}{m+2}} \cdot (x - m + 1)$

$y+1 = -\sqrt{\dfrac{-m}{m+2}} \cdot (x - m - 1)$.

4°



$M(x,y) \in H \iff MF = e \cdot MH$

$\iff (x+\sqrt{2})^2 + (y+1)^2 = 2 \cdot \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\iff x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2y + 1 = 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1$

$\iff x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0$.

$e = \sqrt{2}$ car l'hyperbole est équilatère.

c'est l'équation de H dans le RON$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

H est une des courbes C_m ssi $\exists k \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} m = 1 \cdot k \\ (m+2) = -1 \cdot k \\ -2m(m+2) = 0 \\ 2(m+2) = -2k \\ m^3 - 3m = -2k \end{cases}$

Seule la valeur $k = -1$ vérifie ce système.
Donc : $H = C_{-1}$.