Examen de fin d'études secondaires.
Section [B]. Math I bc Septembre 2001.

I

A.

1) $z^2-(7+3i)z+16+13i=0$

$\Delta=(7+3i)^2-4(16+13i)=49+42i-9-64-52i=-24-10i=[\varepsilon(1-5i)]^2$; $(\varepsilon^2=1)$

On obtient : $z_1=4-i$ ou $z_2=3+4i$.

2) $P(z)=z^3-4(2+i)z^2+(20+23i)z-3-29i=0$.

* $P(a+i)=(a+i)^3-4(2+i)(a+i)^2+(20+23i)(a+i)-3-29i=0$

$\Leftrightarrow (a^3-3a-8a^2+8+8a+20a-26)+i(3a^2-1-16a-4a^2+4-9+23.a)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} g(a)=a^3-8a^2+25a-18=0 \\ a^2-7a+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1$ ou $a=6$

$g(1)=0$ donc $P(1+i)=0$.

et $P(z)$ est divisible par $z-z_0=z-1-i$.

* Schéma de Horner :

	1	$-8-4i$	$20+23i$	$-3-29i$
		$1+i$	$-4-10i$	$3+29i$
$1+i$	1	$-7-3i$	$16+13i$	0

$P(z)=(z-1-i)[z^2-(7+3i)z+(16+13i)]=0$

$S=\{1+i;\ 4-i;\ 3+4i\}$.

B. $f:\ \mathcal{P}\to\mathcal{P}$, $M(z)\mapsto M'(z')$ tel que : $z'=iz+2$

1) $z'=az+b$ avec $a=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

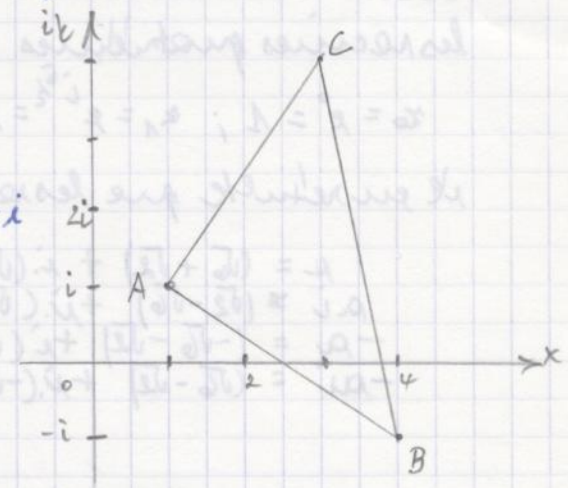
$f=\text{rot}(\Omega,\frac{\pi}{2})$.

L'affixe z_0 du centre Ω est tel que :

$z'=z_0=iz_0+2 \Leftrightarrow (1-i)z_0=2$

$\Leftrightarrow z_0=\frac{2}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=1+i$

donc $\Omega(1+i)=A$.



2) • Si $z=4-i$ alors $z'=i(4-i)+2=3+4i$

donc $f(B)=C$.

• $\left.\begin{array}{l} f(A)=A \\ f(B)=C \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ AB=AC \end{cases}$

$\Rightarrow$ le $\Delta(ABC)$ est rectangle et isocèle de sommet A.

II

1) $Z=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$ $\theta\in\,]-\pi;\pi]$.

* Z n'est pas défini $\Leftrightarrow 1-\cos\theta-i\sin\theta=0$ $\begin{cases}1-\cos\theta=0\\ \sin\theta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\theta=1\\ \sin\theta=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \theta=0$.

* $\forall\theta\in\,]-\pi,\pi]-\{0\}$:

$\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=e^{-i\theta}$

$1-\cos\theta-i\sin\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$

$=2\sin\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}-i\cdot\cos\frac{\theta}{2})$

$=-2i\sin\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$

$1-\cos\theta - i\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\theta/2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$

donc : $z = \dfrac{e^{-i\theta}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot \exp i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})} = \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\cdot e^{-i\theta - i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})} = \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\cdot e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{3\theta}{2})}$

$z = r\cdot e^{i\alpha}$ avec $r = \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ et $\alpha = \dfrac{\pi - 3\theta}{2}\ [2\pi]$.

* $\theta \in]-\pi,\pi] - \{0\} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] - \{0\}$.

- $r>0 \Leftrightarrow \sin\frac{\theta}{2} > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \theta < \pi$
  $r<0 \Leftrightarrow \sin\frac{\theta}{2} < 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < 0 \Leftrightarrow -\pi < \theta < 0$

- si $\theta \in]0,\pi[$ alors $|z| = \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ et $\arg z = \dfrac{\pi - 3\theta}{2}\ [2\pi]$
  si $\theta \in]-\pi,\pi[$ alors $|z| = -r(-e^{-i\alpha}) = -r\cdot e^{i\pi}\cdot e^{i\alpha} = -r\cdot e^{i(\pi+\alpha)}$

  $|z| = -r = -\dfrac{1}{2\sin\theta/2}$ et $\arg z = \pi + \alpha = \dfrac{3\pi - 3\theta}{2}\ [2\pi]$

2) $z = (\sqrt6+\sqrt2) + i(\sqrt6-\sqrt2)$.

* $z^2 = (\sqrt6+\sqrt2)^2 - (\sqrt6-\sqrt2)^2 + 2i(\sqrt6+\sqrt2)(\sqrt6-\sqrt2) = 8+4\sqrt3 - (8-4\sqrt3) + 2i(6-2)$
  $= 8\sqrt3 + 8i = 8(\sqrt3+i)$

$z^4 = (z^2)^2 = 64(\sqrt3+i)^2 = 64(2+2i\sqrt3) = 128(1+i\sqrt3)$.

* donc : $z = (\sqrt6+\sqrt2) + i(\sqrt6-\sqrt2) = a$ est une racine 4^e^ de $Z = 128 + 128i\sqrt3$

racines quatrièmes de Z :

les racines quatrièmes de 1 sont : $z_k = e^{ik\frac{\pi}{2}}$ $(k\in\{0,1,2,3\})$

$z_0 = e^0 = 1$; $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $z_2 = e^{i\pi} = -1$, $z_3 = e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$.

il en résulte que les racines quatrièmes de Z sont :

$a = (\sqrt6+\sqrt2) + i.(\sqrt6-\sqrt2)$
$ai = (\sqrt2-\sqrt6) + i.(\sqrt6+\sqrt2)$
$-a = (-\sqrt6-\sqrt2) + i(\sqrt2-\sqrt6)$
$-ai = (\sqrt6-\sqrt2) + i.(-\sqrt6-\sqrt2)$.

III

RON$(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\mathcal{C}_m)$ $(1-m)x^2 - (1+m)y^2 + 2(1-m).y = 0$

1) $AB = -(1-m)(1+m)$
• $AB = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -1$

m		-1		1	
AB	$+$	0	$-$	0	$+$
$\mathcal{C}_m$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{E}$

• $m = 1$: $M(x,y)\in\mathcal{C}_1 \Leftrightarrow -4y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$.
$\mathcal{C}_1$ est une parabole dégénérée en l'axe des x.

$m = -1$: $M(x,y)\in\mathcal{C}_{-1} \Leftrightarrow 2x^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2y$
$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}.x^2$

$\mathcal{C}_{-1}$ est une parabole d'axe (Oy) tournant sa

concavité vers le bas ; $p=-1$; sommet O ; foyer $F(0;-\frac{1}{2})$.
directrice $y=-\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$.

• $\forall m \in \mathbb{R}-\{-1,1\}$: $\mathcal{C}_m$ est une conique à centre de centre $\Omega_m(0, \frac{1-m}{1+m})$

RON$(O,\vec{i},\vec{j})$:

$$M(x,y)\in \mathcal{C}_m \Leftrightarrow (1-m)x^2-(1+m)y^2+2(1-m)y=0$$
$$\Leftrightarrow (1-m)x^2-(1+m)\left[y^2+2\cdot\frac{1-m}{1+m}\cdot y+\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2\right]=-\frac{(1-m)^2}{1+m}$$
$$\Leftrightarrow (1-m)x^2-(1+m)\left(y-\frac{1-m}{1+m}\right)^2=-\frac{(1-m)^2}{1+m}$$

translation des axes en $\Omega_m(0;\frac{1-m}{1+m})$.
équation de translation : $\begin{cases} x = X+0 \\ y = Y+\frac{1-m}{1+m}\end{cases}$

RON$(\Omega_m,\vec{i},\vec{j})$:

$$M(X,Y)\in\mathcal{C}_m \Leftrightarrow (1-m)X^2\ (1-m)Y^2=-\frac{(1-m)^2}{1+m} \quad \Big| : \frac{-(1-m)^2}{1+m}$$

équation réduite : $\Leftrightarrow \dfrac{X^2}{-\frac{1-m}{1+m}}+\dfrac{Y^2}{\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2}}=1$

posons : $\alpha=\frac{m-1}{m+1}$; $\beta=\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2>0$.

m	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$m+1$		$-$	0	$+$		$+$	
α		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
β		$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	

$\forall m\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$:

$\mathcal{C}_m$ est une ellipse d'équation : $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ avec $a^2=\alpha$ et $b^2=\beta$.
Calculons :
$$a^2-b^2=\frac{(m-1)(m+1)-(m-1)^2}{(m+1)^2}=\frac{(m-1)(m+1-m+1)}{(m+1)^2}=\frac{2(m-1)}{(m+1)^2}$$

Si $m\in]-\infty,-1[$ alors $a^2-b^2<0 \Rightarrow a<b \Rightarrow$ axe focal $(\Omega_m Y)$.
Si $m\in]1,+\infty[$ alors $a^2-b^2>0\Rightarrow a>b\Rightarrow$ axe focal $(\Omega_m X)$.

$\forall m\in]-1,1[$:

$\mathcal{C}_m$ est une hyperbole d'équation : $\frac{X^2}{-a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ avec $\begin{matrix}-a^2=\alpha\\ b^2=\beta\end{matrix}$

Toutes les hyperboles ont pour axe transverse $(\Omega_m Y)$.

2) RON$(\Omega_m,\vec{i},\vec{j})$.

Étude de $\mathcal{C}_0$: $\Omega_0(0,1)$
$M(X,Y)\in\mathcal{C}_0 \Leftrightarrow -X^2+Y^2=1$ (hyperbole équilatère d'axe focal $(\Omega_0 Y)$)
$a^2=1$, $b^2=1 \Rightarrow a=1$, $b=1$; $c^2=a^2+b^2=2\Rightarrow c=\sqrt{2}$.

Foyers : $F(0,\sqrt{2})$; $F'(0,-\sqrt{2})$

Excentricité linéaire : $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2} > 1$;

Paramètre : $p = \frac{b^2}{a} = 1$.

Directrices : $Y = \pm \frac{b^2}{c} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cong \pm 0,71$.

Asymptotes : $Y = \pm \frac{b}{a} \cdot X = \pm X$.