Examen de fin d'études secondaires.
Section [B]. Maths I 27 mai 2002.

I

1° A, B, C sont alignés ssi $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$

Or : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{50-94i-4+2i}{2+2i-4+2i} = \dfrac{46-92i}{-2+4i} = \dfrac{46(1-2i)}{-2(1-2i)} = -23 \in \mathbb{R}^*$.

donc A, B, C sont alignés.

[On a encore $D(-98-48i)$; $BA \perp BD \Leftrightarrow (\vec{BA}, \vec{BD}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_B} \in i\mathbb{R} - \{0\}$

Or : $\dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{-98-48-2-2i}{4-2i-2-2i} = \dfrac{-100-50i}{2-4i} = \dfrac{-50(2+i)}{2(1-2i)} \cdot \dfrac{1+2i}{1+2i} = \dfrac{-25(2+4i+i-2)}{5}$

$= \dfrac{-25 \cdot 5i}{5} = -25i \in i\mathbb{R} - \{0\}$; donc $BA \perp BD$].

2° $1 - i\sqrt{3} = 2\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $-1-i = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{-1-i} = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{12}$

$Z = \left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{-1-i}\right)^{2002} = 2^{1001} \cdot \mathrm{cis}\left(2002 \cdot \frac{5\pi}{12}\right)$; $2002 \cdot \frac{5\pi}{12} = \frac{5005\pi}{6} = \left(834 + \frac{1}{6}\right)\pi \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

Ainsi : $Z = 2^{1001} \cdot \mathrm{cis}\,\frac{\pi}{6} = 2^{1001}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2^{1000}(\sqrt{3} + i)$.

3° $P(-i) = 0 \Leftrightarrow (-i)^3 + \alpha(-i)^2 + \beta(-i) + 5 - i = 0$
$\Leftrightarrow i - \alpha - \beta i + 5 - i = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta i = 5$ (1)

$P(-2i) = 1 - 3i \Leftrightarrow (-2i)^3 + \alpha(-2i)^2 + \beta(-2i) + 5 - i = 1 - 3i$
$\Leftrightarrow 8i - 4\alpha - 2\beta i + 5 - i = 1 - 3i \Leftrightarrow 2\alpha + \beta i = 2 + 5i$ (2)

(1) $\to$ $\alpha = 5 - \beta i$ (3)
(3) $\to$ (2) : $2(5 - \beta i) + \beta i = 2 + 5i$
$10 - 2\beta i + \beta i = 2 + 5i$
$\beta i = 8 - 5i \Leftrightarrow \beta = -5 - 8i$

(3) $\to$ $\alpha = 5 - (-8i - 5)i = -3 + 5i$

Ainsi $P(z) = z^3 + (-3+5i)z^2 + (-5-8i)z + 5 - i$

$P(z) = (z + i)Q(z)$.

Schéma de Horner :

	1	$-3+5i$	$-5-8i$	$5-i$
		$-i$	$4+3i$	$-5+i$
$-i$	1	$-3+4i$	$-1-5i$	0

Donc : $Q(z) = z^2 + (-3+4i)z - (1+5i)$.
Discriminant : $\Delta = (-3+4i)^2 + 4(1+5i) = -3 - 4i = [\varepsilon(1-2i)]^2$.

$Q(z) = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{3 - 4i + \varepsilon(1-2i)}{2}$

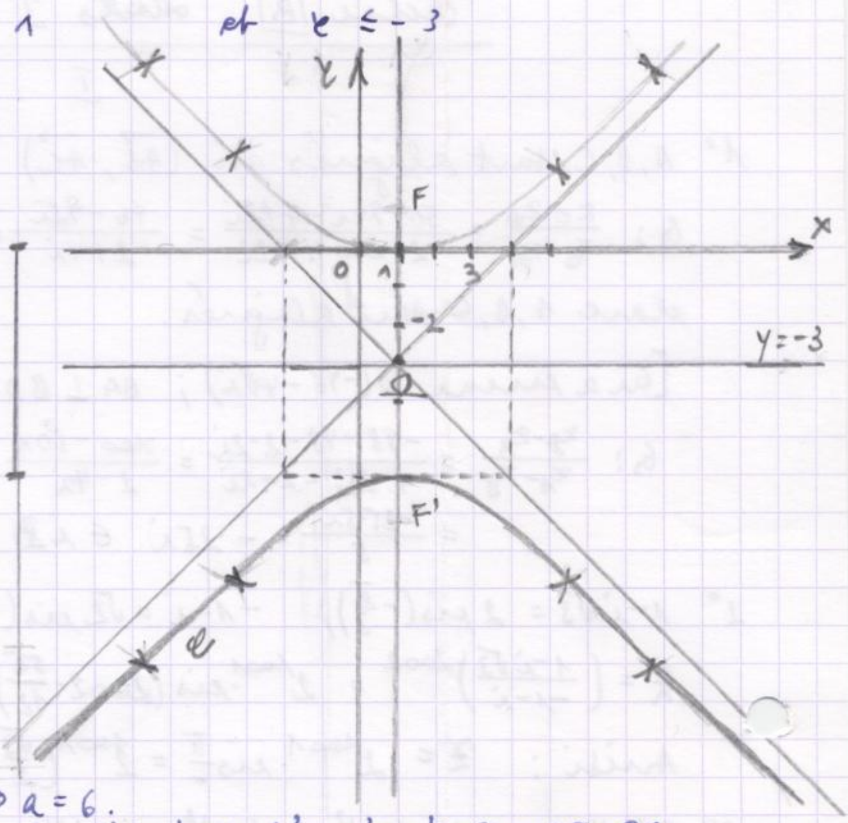
Ainsi : $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -i$ ou $z = 1 - i$ ou $z = 2 - 3i$.

II

a) $\mathcal{C} \equiv y = -3 - \sqrt{x^2 - 2x + 10}$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 10} = -(y + 3)$ donc $y + 3 \le 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 10 = (-1)^2(y+3)^2 \\ y \le -3 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2x + 1) - (y+3)^2 = -9 \\ y \le -3 \end{cases}$

$\iff (x-1)^2-(y+3)^2=-9$ et $y\le -3$

$\iff -\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$ et $y\le -3$



ℓ est une hyperbole équilatère, image de l'hyperbole $\mathcal{H}\equiv -x^2+y^2=9$ par la translation : $\vec{u}(1,-3)$.

ℓ est la demi-branche inférieure de l'hyperbole

b.) $2a=4 \iff a=2$ et $e=\frac{1}{3}$.

$d(O,D)=\frac{a}{e}=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$.

c) $\mathcal{K}=\{M\in\mathcal{P} \mid \overline{AM}+\overline{MB}=12\}$.
et $\overline{AB}=10<12$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ est une ellipse de foyers A et B, de centre O = mil [A, B], d'axe focal (Ox) car A, B ∈ (Ox), et de grand axe $2a=12 \iff a=6$.

De plus : $2c=10 \Rightarrow c=5$; $a^2=b^2+c^2 \iff b^2=a^2-c^2=36-25=11$.

Équation de $\mathcal{K}\equiv \dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{11}=1$.

d)

$\ell_1\equiv \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ ℓ_1 = ellipse de centre O, d'axe focal (Oy)
$b^2=a^2+c^2 \iff c^2=b^2-a^2=25-16=9 \Rightarrow c=3$.
foyers de ℓ_1 : $F_1(0;3)$; $F_2(0;-3)$.

$\ell_2\equiv -\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ℓ_2 = hyperbole de centre O et d'axe transverse (Oy).
$c^2=a^2+b^2=5+4=9 \Rightarrow c=3$.
D.c. ℓ_2 possède les mêmes foyers que ℓ_1.

e) $\mathbb{P}\equiv x^2-2x-4y-7=0$ et $P(2;-3)$.

! Éq. d'une droite d_m passant par P : $y+3=m(x-2)$
d_m est tangente à $\mathbb{P}$ $\iff$ le système $\begin{cases} y=mx-(2m+3) & (1)\\ x^2-2x-4y-7=0. & (2)\end{cases}$
admet une solution double (x_0,y_0).

$(1)\to(2)$: $x^2-2x-4(mx-2m-3)-7=0$
$\iff x^2-2(1+2m)x+(8m+5)=0$ (3)

d_m est tangente à $\mathbb{P}$ $\iff$ (3), éq. du second degré possède une solution double x_0.
$\iff$ le discriminant (réduit) de (3) est nul.
$\iff (1+2m)^2-(8m+5)=0$
$\iff 1+4m+4m^2-8m-5=0$
$\iff 4(m^2-m-1)=0$.
$\iff m=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$.

Il y a donc 2 tangentes à $\mathbb{P}$ issues de P, à savoir les droites :

$d_{\frac{1\pm\sqrt5}{2}}\equiv y=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}x-\left(2\cdot\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}+3\right) \iff y=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}\cdot x-(4\pm\sqrt5)$.

! d_m est la famille de toutes les droites passant par P – à l'exception de la droite verticale, qui n'est sûrement pas tangente à $\mathbb{P}$.

III

1° a) Tirer une boule de l'urne est une expérience de Bernoulli.

tirer une boule blanche = succès $p(\text{succès}) = \frac{7}{10}$
— noire = échec $p(\text{échec}) = \frac{3}{10}$.

Tirer successivement et avec remise 5 boules de l'urne est un schéma de Bernoulli, $p = \frac{7}{10}$ et $n = 5$.
(en effet, on répète 5 fois l'expérience de Bernoulli dans les mêmes conditions puisqu'on remet chaque fois la boule tirée).

évé^t élémentaire = une suite de 5 lettres B ou N.
(B : boule blanche
N : boule noire.)

$X : \Omega \to \mathbb{R}$
$\omega \mapsto X(\omega)$ = nombre de lettres B ou N

La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $p = 0,7$ et $n = 5$:

$$P(X=k) = C_5^k \cdot 0,7^k \cdot 0,3^{5-k} \qquad (k \in \{0,1,2,3,4,5\}).$$

$P(\text{"tirer au moins une boule noire"})$
$= 1 - P(\text{"tirer 5 boules blanches"})$
$= 1 - P(X=5) = 1 - C_5^5 \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^0 = 0,8319 = 83,19\%$.

b) expérience aléatoire = tirer simultanément 5 boules de l'urne (l'ordre de tirage n'importe pas).

évé^t élém^t ω = un ens. de 5 lettres B ou N (choisi dans l'ensemble $\{B_1, B_2, \dots, B_7, N_8, N_9, N_{10}\}$).

tous les évé^{ts} élémentaires sont équiprobables.

$Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$\omega \longmapsto X'(\omega)$ = le n^{bre} de lettres B contenues dans ω.

Y : variable aléatoire prenant les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5.

$p(Y=0) = p(\text{"tirer 5 N"}) = 0.$

$p(Y=1) = p(\text{"tirer 1 B et 4 N"}) = 0.$

$p(Y=2) = p(\text{"tirer 2 B et 3 N"}) = \frac{C_7^2 \cdot C_3^3}{C_{10}^5} = \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{5!5!}{10!} = \frac{1}{12}$

$p(Y=3) = p(\text{"tirer 3 B et 2 N"}) = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{7! \cdot 3 \cdot 5!5!}{3!4! \; 10!} = \frac{5}{12}.$

$p(Y=4) = p(\text{"tirer 4 B et 1 N"}) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^1}{C_{10}^5} = \frac{5}{12}.$

$p(Y=5) = p(\text{"tirer 5 B"}) = \frac{C_7^5}{C_{10}^5} = \frac{7!}{5!2!} \cdot \frac{5!5!}{10!} = \frac{1}{12}$

$E(Y) = 0 \cdot p(X'=0) + 1 \cdot p(X'=1) + 2 \cdot p(X'=2) + 3 \cdot p(X'=3) + 4 \cdot p(X'=4) + 5 \cdot p(X'=5)$
$= 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{5}{12} + 4 \cdot \frac{5}{12} + 5 \cdot \frac{1}{12} = \frac{42}{12} = \frac{7}{2} = 3,5.$

2).a) Théorie (2 façons pour le démontrer).

b.) $0=[1+(-1)]^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 1^{n-k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k$

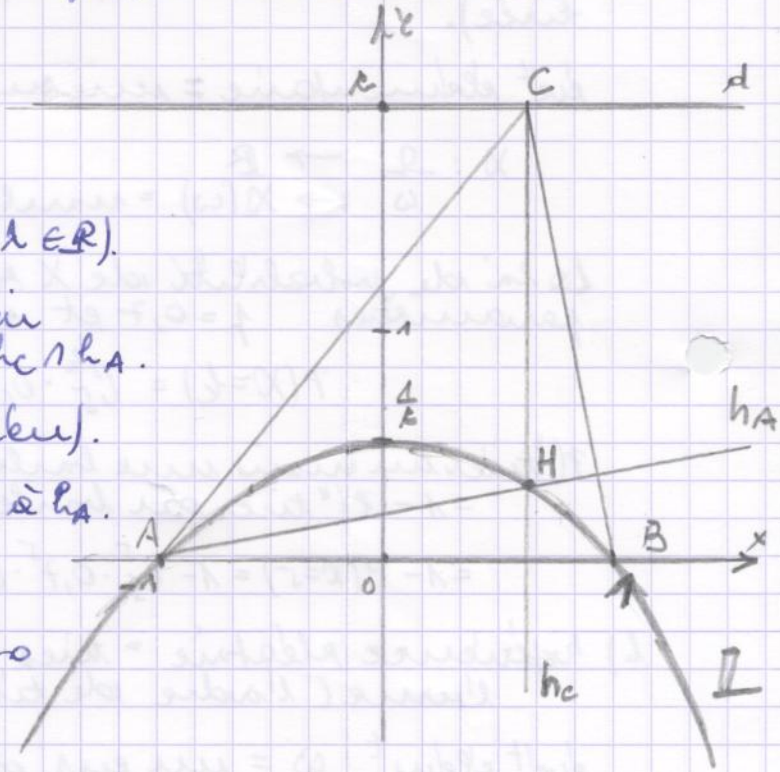
c) $(2x^3-1)^8=\left[(2x^3)+(-1)\right]^8=\sum_{k=0}^{8} C_8^k\,(2x^3)^{8-k}\cdot(-1)^k=\sum_{k=0}^{8} C_8^k(-1)^k\cdot 2^{8-k}\cdot x^{24-3k}$

$\frac{(2x^3-1)^8}{x^2}=\sum_{k=0}^{8} C_8^k\cdot(-1)^k\cdot 2^{8-k}\cdot x^{22-3k}$

Le terme en x^{13} s'obtient pour : $22-3k=13$ c.-à-d. $k=3$.

Le coefficient de x^{13} est donc : $C_8^3(-1)^3\cdot 2^5=-56\cdot 32=-1792$.

IV



Rom (Ox, Oy) avec $O=$ mil $[A,B]$.

Posons : $A(-1,0)$; $B(1,0)$.

$C(\lambda, k)$ ($k>0$ fixé, $\lambda\in\mathbb{R}$).

L'orthocentre est p.ex. l'intersection des hauteurs h_C et h_A : $\{H\}=h_C\cap h_A$.

$h_C\equiv x=\lambda$ (1re génératrice du lieu).

$\overrightarrow{BC}(\lambda-1;k)$ est un vect. normal à h_A.

$M(x,y)\in h_A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(\lambda-1)+yk=0$

$\Leftrightarrow (\lambda-1)x+ky+(\lambda-1)=0$

$h_A\equiv(\lambda-1)x+ky+(\lambda-1)=0$

(2e génératrice du lieu).

$H(x,y)\in\mathcal{L}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}$: $\begin{cases} x=\lambda & (1)\\ (\lambda-1)x+ky+(\lambda-1)=0 & (2)\end{cases}$

$(1)\to\quad \lambda=x$

Est-ce que λ est également solution de (2) ?

Oui, si $(x-1)\cdot x+ky+(x-1)=0$

si $x^2-\cancel{x}+ky+\cancel{x}-1=0$

si $x^2+ky-1=0$

Ainsi $\mathcal{L}\equiv x^2+ky-1=0.\quad\Leftrightarrow x^2=-ky+1$

$\Leftrightarrow x^2=-k\left(y-\frac{1}{k}\right)$

$\mathcal{L}$ est donc la parabole de sommet $S\left(0,\frac{1}{k}\right)$; d'axe focal (Oy) ; tournant sa concavité vers le bas.

(p.ex. pour $k=2$, $\mathcal{L}\equiv x^2+2y-1=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}(1-x^2)$.)

$A(-1,0)\in\mathcal{L}$ car $(-1)^2=-k\left(0-\frac{1}{k}\right)$

$B(1,0)\in\mathcal{L}$ car $1^2=-k\left(0-\frac{1}{k}\right)$.