Examen de fin d'études secondaires
Section B. Mathématiques 1. juin 2003

I

1° $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

$z_2 = \frac{i}{2i\sqrt{3}-2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{i(-1-i\sqrt{3})}{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})} = \frac{-2i+2\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$Z = \frac{z_1^8}{z_2^3} = \frac{e^{\frac{16i\pi}{3}}}{\frac{1}{64}\cdot e^{-3i\pi/6}} = 64\cdot\exp\left(\frac{16i\pi}{3}+\frac{i\pi}{2}\right) = 64\exp\frac{35i\pi}{6} = 64e^{-i\pi/6} = 32\sqrt{3}-32i$

2° $P(z) = z^3+\alpha z^2+\beta z+6+3i$ $\quad(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$.

a) $P(i)=0 \Leftrightarrow -i-\alpha+\beta i+6+3i=0 \Leftrightarrow -\alpha+\beta i = -6-2i$
$P(-1)=8 \Leftrightarrow -1+\alpha-\beta+6+3i=8 \Leftrightarrow \alpha-\beta = 3-3i$

Système: $\begin{cases} -\alpha+\beta i = -6-2i & (1)\\ \alpha-\beta = 3-3i & (2)\end{cases}$

(1)+(2) $\quad \beta(-1+i) = -3-5i$

$\beta = -\frac{3+5i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i} = -1+4i$

$\alpha = 3-3i-1+4i = 2+i$

c.à.d. $P(z) = z^3+(2+i)z^2+(-1+4i)z+6+3i$

b.) Schéma de Horner:

	1	2+i	-1+4i	6+3i
		i	-2+2i	-6-3i
i	1	2+2i	-3+6i	$\boxed{0}$

$z_0 = i$

Donc: $P(z) = (z-i)\left[z^2+2(1+i)z-3(1-2i)\right] = 0$

Posons: $z^2+2(1+i)z-3(1-2i) = 0$

Discriminant (réduit) $\Delta' = (1+i)^2+3(1-2i) = 3-4i = \left[\pm(2-i)\right]^2$

$z = \frac{-(1+i)\pm(2-i)}{2} \Rightarrow z_1 = \frac{-6}{2} = -3$ ou $z_2 = \frac{1-2i}{1} = 1-2i$

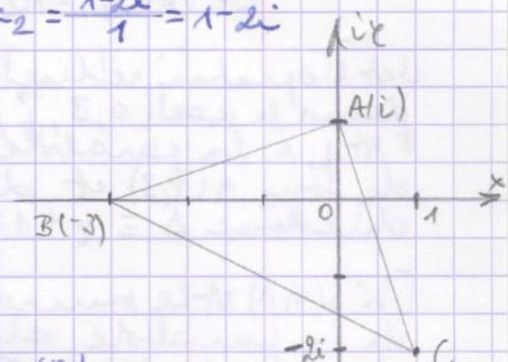
$S = \{i; -3; 1-2i\}$.

c) $AB = |z_B-z_A| = |-3-i| = \sqrt{10}$
$BC = |z_C-z_B| = |4-2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$CA = |z_A-z_C| = |1-3i| = \sqrt{10}$.

Donc: $AB = AC = \sqrt{10}$

De plus: $(-3-i)i = 1-3i$
$\Leftrightarrow (z_B-z_A)\cdot i = (z_C-z_A)$
$\Leftrightarrow \vec{AC} = \mathrm{rot}(A, \frac{\pi}{2})(\vec{AB})$ ou $C = r(B)$

Le $\Delta(ABC)$ est isocèle et rectangle en A.



II

1° Plaque: □□ ○○○ 2 lettres sur 26 ; 3 chiffres sur 10.

a) $B_{26}^2\cdot B_{10}^3 = 26^2\cdot 10^3 = 676'000$ plaques

b.) $A_{26}^2\cdot B_{10}^3 = (26\cdot 25)\cdot 10^3 = 650'000$ plaques.

c) $B_{26}^2\cdot A_{10}^3 = (26^2)\cdot(10\cdot 9\cdot 8) = 486'720$ plaques.

d) $A_{26}^2\cdot 9\cdot 9\cdot 8 = 421'200$ plaques.

$2°\ \left(2x^2 - \frac{1}{8x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} (-1)^k \cdot C_{12}^k (2x^2)^{12-k} \cdot \left(\frac{1}{2^3 \cdot x}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (-1)^k \cdot 2^{12-k-3k} \cdot x^{24-2k-k}$

$= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (-1)^k \cdot 2^{12-4k} \cdot x^{24-3k}$ Condition : $24-3k = 9$, $k = 5$

Terme en x^9 : $C_{12}^5 (-1)^5 \cdot 2^{12-20} \cdot x^9 = -\frac{792 x^9}{256} = -\frac{99}{32} \cdot X^9$

3° Variable aléatoire : gains obtenus par le joueur.
Les valeurs x_i prises par X sont 5, 2, 1 et −1 €.

$\Omega = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);\ldots\ldots;(6,6)\}$ card $\Omega = 36$.
2 chiffres pairs : (2,2); (2,4); (2,6); (4,2); (4,4); (4,6); (6,2); (6,4); (6,6) : 9 cas (sur 36)
1 chiffre pair : 18 cas (sur 36)
0 chiffre pair : (1,1); (1,3); (1,5); (3,1); (3,3); (3,5); (5,1); (5,3); (5,5) : 9 cas.

$P(X=5) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$; $P(X=2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; $P(X=-1) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Loi de probabilité :

x_i	5	2	−1
p_i	1/4	1/2	1/4

Espérance math. $E(X) = \sum x_i p_i = 5 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{4} = 2$
(On peut effectivement espérer gagner 2 €).

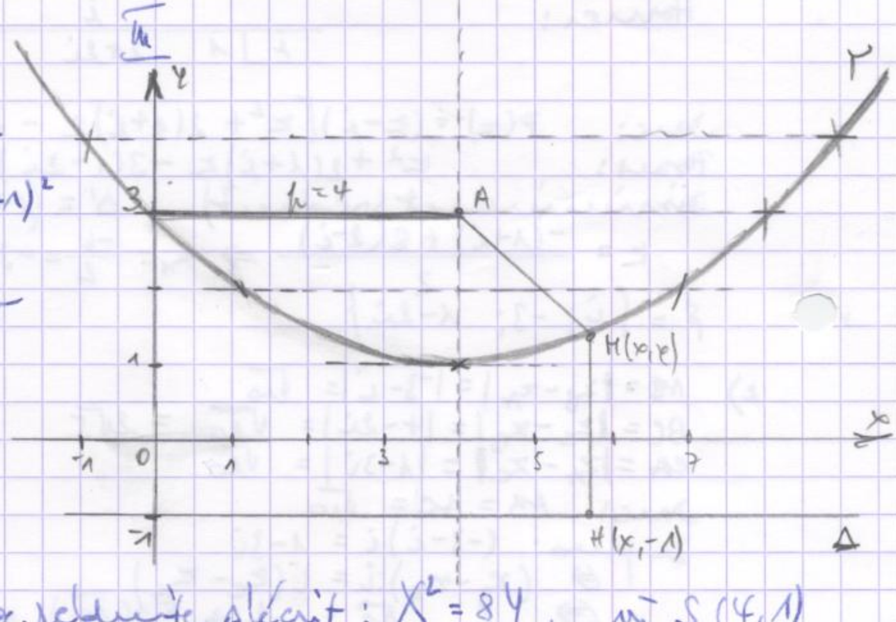
Variance : $V(X) = \sum_i p_i [x_i - E(X)]^2 = \frac{1}{4}(5-2)^2 + \frac{1}{2}(2-2)^2 + \frac{1}{4}(-1-2)^2 = \frac{9}{2}$.

Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

1°
* Construction de Γ.
* Équation cartésienne de Γ.

$M(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow AM = d(M,\Delta)$
$\Leftrightarrow (4-x)^2 + (y-3)^2 = (y+1)^2$
$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 8(y-1)$

C'est l'équation réduite de Γ dans le RON$(O,\vec{i},\vec{j})$.
Γ est p.c. la parabole de foyer $A(4,3)$ et de directrice $\Delta \equiv y+1=0$.



[Si $S(4,1)$ est le sommet de la parabole alors dans le RON$(S,\vec{i},\vec{j})$, l'éq. réduite s'écrit : $X^2 = 8Y$ où $S(4,1)$, $\frac{p}{2} = 2$
avec : $\begin{cases} X = x-4 \\ Y = y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X+4 \\ y = Y+1 \end{cases}$ (équations de translation des axes.]

2° $\Gamma' \equiv x^2 - 6y^2 + 12y - 18 = 0$ RON$(O,\vec{i},\vec{j})$

a) $x^2 - 6(y^2 - 2y + 1) = 18 - 6$
$x^2 - 6(y-1)^2 = 12$
$\frac{x^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$ dans le RON$(O,\vec{i},\vec{j})$.

Effectuons une translation des axes en $\Omega(0,1)$.

Équations de translation : $\begin{cases} x = X + 0 \\ y = Y + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$

$RON(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: $\Gamma' \equiv \dfrac{X^2}{(2\sqrt{3})^2} - \dfrac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$

C'est l'équation réduite de Γ', qui est une hyperbole d'axe transverse ΩX.

Tableau :

	$RON(O, \vec{i}, \vec{j})$	$RON(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$
centre	$\Omega(0,1)$	$\Omega(0,0)$
foyers	$F(\sqrt{14},1)$; $F'(-\sqrt{14},1)$	$F(\sqrt{14},0)$; $F'(-\sqrt{14},0)$
sommets	$A(2\sqrt{3},1)$; $A'(-2\sqrt{3},1)$	$A(2\sqrt{3},0)$; $A'(-2\sqrt{3},0)$
directrices	$x = \pm \frac{6}{7}\sqrt{14}$	$X = \pm\frac{a^2}{c} = \pm \frac{6}{7}\sqrt{14}$
asymptotes	$y = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} x + 1$	$Y = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} X$

car : $a^2 = 12$, $a = 2\sqrt{3}$; $b^2 = 2$, $b = \sqrt{2}$; $c^2 = a^2 - b^2 = 14 \Rightarrow c = \sqrt{14}$.

b.) Résolvons le système :
$t \equiv y = \frac{1}{2}x + m$ (1)
$\Gamma' \equiv x^2 - 6y^2 + 12y - 18 = 0$ (2)

(1) $\to$ $x = 2(y - m)$ (3)

(3) $\to$ (2) $4(y^2 - 2my + m^2) - 6y^2 + 12y - 18 = 0$ $|:2$

$2y^2 - 4my + 2m^2 - 3y^2 + 6y - 9 = 0$

$y^2 + 2(2m - 3)y + (-2m^2 + 9) = 0$ (4)

c'est l'équation aux ordonnées des points d'intersection

condition de tangence :

$\Delta = 0 \iff 4(2m - 3)^2 - 4(9 - 2m^2) = 0$ $|:4$

$\iff 4m^2 - 12m + 9 - 36 + 2m^2 = 0$

$\iff 6m(m - 2) = 0$

$\iff m = 0$ ou $m = 2$

Ainsi les tangentes recherchées ont pour équations :
$t_1 \equiv y = \frac{1}{2}x$ respectivement $t_2 \equiv y = \frac{1}{2}x + 2$

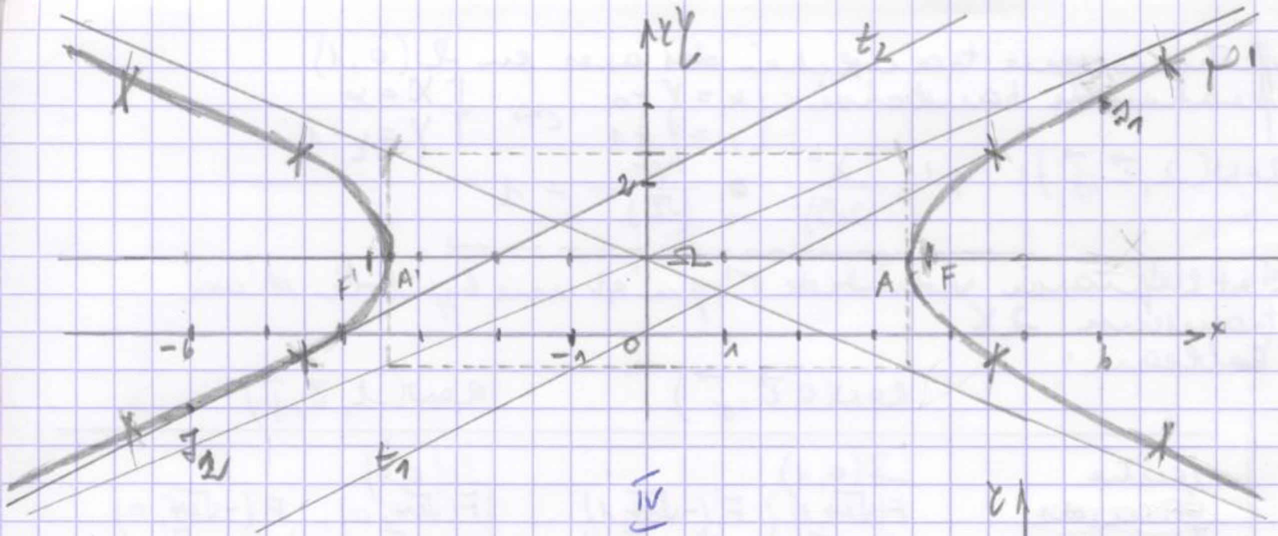
- $t_1 \cap \Gamma'$: (4) $\to$ $y^2 - 6y + 9 = 0 \iff (y-3)^2 = 0 \iff y = 3$ et $x = 2y = 6$

$t_1 \cap \Gamma' = \{T_1(6,3)\}$.

- $t_2 \cap \Gamma'$: (4) $\to$ $y^2 + 2y + 1 = 0 \iff (y+1)^2 = 0 \iff y = -1$ et $x = 2y - 4 = -6$

$t_2 \cap \Gamma' = \{T_2(-6,-1)\}$.

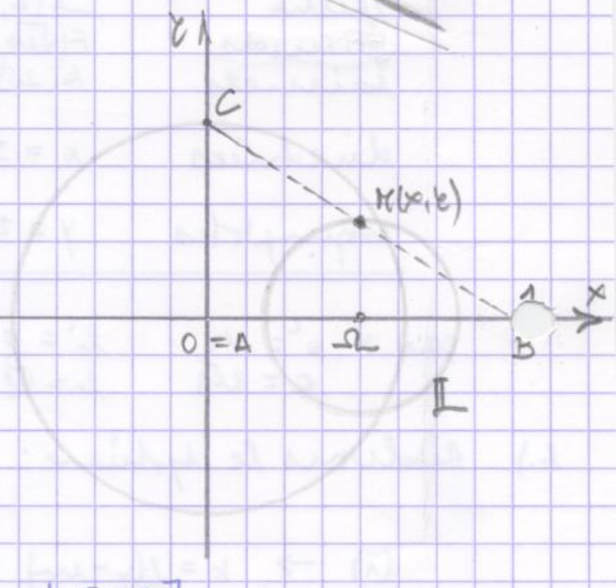
Figure.



IV

1° Plaçons le RON tel que $O = A(0,0)$ et $B(1,0)$:
$AB = Ox$; $\overline{AC} = k \ (k>0)$ signifie que $C \in \mathscr{C}(A, k)$ en d'autres termes :

$$x_C^2 + y_C^2 = k^2 \qquad (1)$$



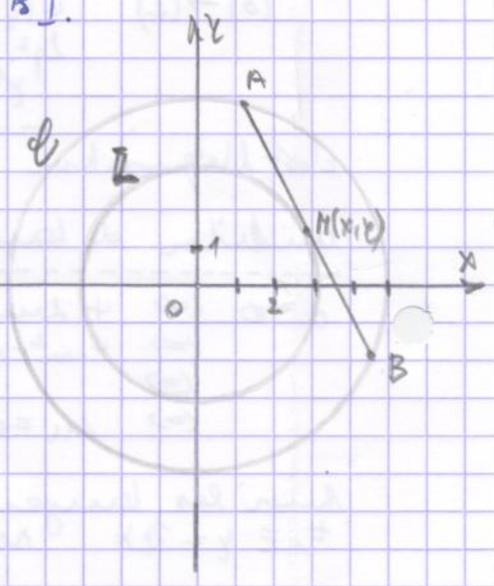
Γ : ensemble des points $M(x,y)$ avec $M = \text{mil}[B,C]$, d'où :

$$x = \tfrac{1}{2}(x_C + x_B) \quad \text{et} \quad y = \tfrac{1}{2}(y_C + y_B)$$
$$x = \tfrac{1}{2}(x_C + 1) \quad \text{et} \quad y = \tfrac{1}{2} y_C$$
$$2x - 1 = x_C \quad \text{et} \quad 2y = y_C \qquad (2)$$

$(2) \rightarrow (1)$: $(2x-1)^2 + (2y)^2 = k^2$
$\iff 4(x - \tfrac{1}{2})^2 + 4y^2 = k^2$
$\iff (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 = \left(\tfrac{k}{2}\right)^2$

c.à.d. $\Gamma = \mathscr{C}\left(\Omega(\tfrac{1}{2}, 0) ; r = \tfrac{k}{2}\right)$ avec $\Omega = \text{mil}[A, B]$.

2° A et B sont 2 points distincts du cercle $\mathscr{C}(O(0,0) ; r = 5)$ avec $\overline{AB} = 8$.



1re méthode :

$M = \text{mil}[A,B] \iff \overline{AM} = \overline{MB} = 4$
le Δ (OMA) respectivement (OMB) étant rectangle en M, on a :
$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$
et $\Gamma = \mathscr{C}(O(0,0) ; r = 3)$.

2e méthode :

$A(x_A, y_A) \in \mathscr{C} \iff x_A^2 + y_A^2 = 25$
$B(x_B, y_B) \in \mathscr{C} \iff x_B^2 + y_B^2 = 25$

$\overline{AB} = 8 \iff (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 64 \iff 2(x_B x_A + y_B y_A) = -14$.

Γ : ensemble des points $M(x,y)$ avec $M = \text{mil}[A,B]$.
d'où :

$$x = \tfrac{1}{2}(x_A + x_B) \quad \text{et} \quad y = \tfrac{1}{2}(y_A + y_B)$$
$$2x = x_A + x_B \quad \text{et} \quad 2y = y_A + y_B$$

calculons : $(2x)^2 + (2y)^2 = (x_A + x_B)^2 + (y_A + y_B)^2$
$4x^2 + 4y^2 = x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 + 2(x_A x_B + y_A y_B)$
$4x^2 + 4y^2 = 25 + 25 + (-14) = 36$
$x^2 + y^2 = 9$

et $\Gamma = \mathscr{C}(O(0,0) ; r = 3)$.