Question 1

1. Soit

$$P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 1 - i \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

1) Détermination de α et β

$$\begin{cases} P(-i) &= 0 \\ P(-1) &= 2i+2 \end{cases} \iff \begin{cases} (-i)^3 + \alpha(-i)^2 + \beta(-i) + 1 - i &= 0 \\ (-1)^3 + \alpha(-1)^2 + \beta(-1) + 1 - i &= 2i+2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} i - \alpha - \beta i + 1 - i &= 0 \\ -1 + \alpha - \beta + 1 - i &= 2i+2 \end{cases} \iff \begin{cases} +\alpha + i\beta &= +1 \\ \alpha - \beta &= 3i+2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (-i-1)\beta &= 3i+1 \\ (1-i)\alpha &= 2i+2 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= \frac{3i+1}{-i-1} \\ \alpha &= \frac{2i+2}{1-i} \end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= \frac{(3i+1)(-1+i)}{2} \\ \alpha &= \frac{(2i+2)(1+i)}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta &= \frac{-3i-1-3+i}{2} \\ \alpha &= \frac{2i+2-2+2i)}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= \frac{-2i-4}{2} \\ \alpha &= \frac{4i}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= 2i \\ \beta &= -2-i \end{cases}$$

4 points

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 2iz^2 + (-2-i)z + 1 - i = 0$.

	1	$2i$	$-2-i$	$-1-i$
$-i$		$-i$	1	$1+i$
	1	i	$-1-i$	0

Ainsi :

$$P(z) = (z+i)(z^2 + iz - 1 - i)$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + iz - 1 - i = 0$. Réalisant (discriminant)

$$\rho = i^2 - 4(-1-i) = -1 + 4 + 4i = 3 + 4i$$

Racines carrées complexes de ρ :

$$(a+bi)^2 = \rho \iff \begin{cases} a^2 + b^2 &= |\rho| \\ a^2 - b^2 &= Re(\rho) \\ 2ab &= Im(\rho) \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 &= 5 \\ a^2 - b^2 &= 3 \\ 2ab &= +4 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 &= 4 \\ b^2 &= 1 \\ 2ab &= +4 \end{cases}$$

Les racines carrées complexes de ρ sont $2+i$ et $-2+i$ et l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{-i, +1, -1-i\}$

4 points

2. $z_A = 3 + 2i$ et $z_B = -\sqrt{2} - 5i\sqrt{2}$

1)

$$\begin{aligned} \frac{z_B}{z_A} &= \frac{-\sqrt{2}-5i\sqrt{2}}{3+2i} \\ &= \frac{\sqrt{2}(-1-5i)(3-2i)}{13} \\ &= \frac{\sqrt{2}(1+5i)(-3+2i)}{13} \\ &= \frac{\sqrt{2}(-3+2i-15i-10)}{13} \\ &= \frac{\sqrt{2}(-13-13i)}{13} \\ &= -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \qquad \text{forme algébrique} \\ &= 2\text{cis}\frac{-3\pi}{4} \qquad \text{forme trigonométrique} \end{aligned}$$

3points

2)

$$\frac{z_B}{z_A} = 2\text{cis}\frac{-3\pi}{4} \iff z_B = 2\text{cis}\frac{-3\pi}{4} z_A$$

et par conséquent B est l'image de A par la composée de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{-3\pi}{4}$ et de l'homothétie h de centre O et de rapport 2. 2 points

3)

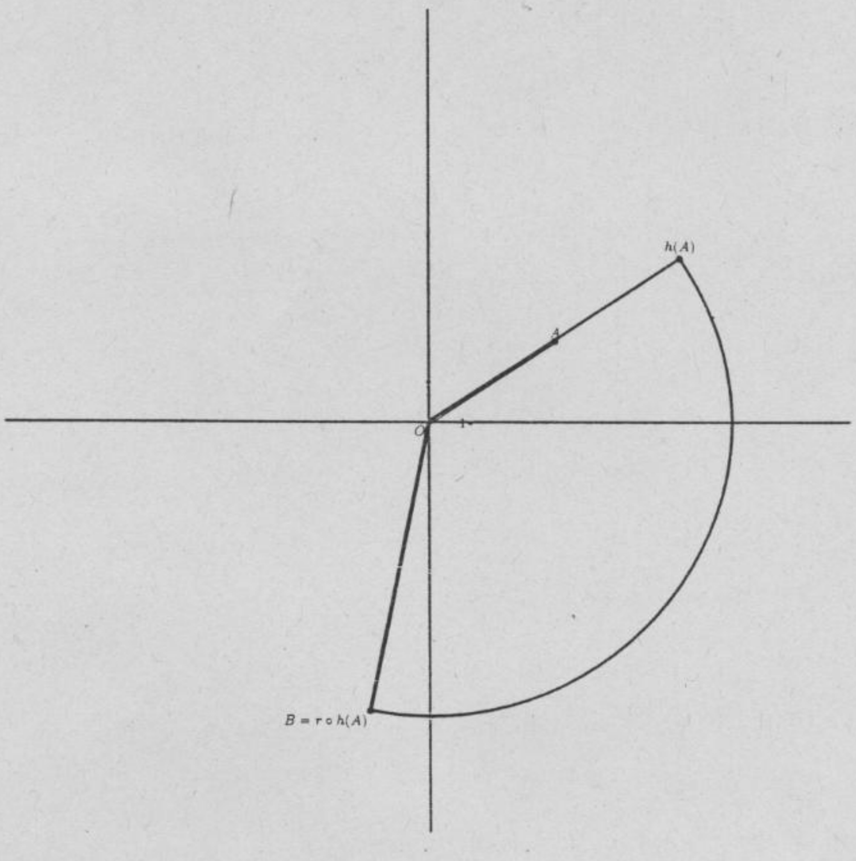

FIG. 1 – Efes04Fig01.mps

2 points

Question 2

1. Pour former un tel mot on choisit d'abord un sous-ensemble (sans ordre) de 3 consonnes différentes (pas de répétition) parmi les 21 disponibles : il y a C_{21}^{3} choix pour les consonnes.
Pour chacun de ces choix on prend un sous-ensemble (sans ordre) de 2 voyelles différentes (pas de répétition) parmi les 5 disponibles : il y-a C_{5}^{2} choix pour les voyelles.
Ainsi il y-a $C_{21}^{3} \cdot C_{5}^{2}$ choix possibles pour les 5 lettres.
Un mot étant une des P_5 permutations des 5 lettres, le nombre de mots est :

$$C_{21}^{3} \cdot C_{5}^{2} \cdot P_5 = 1330 \cdot 10 \cdot 120 = 1596000$$

3 points

2. Jeter un dé non truqué avec une probabilité de succès $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et une probabilité d'échec $q = 1 - p = \frac{2}{3}$ est une épreuve de Bernoulli.
Répéter 5 fois cette épreuve dans les mêmes conditions est un schéma de Bernoulli.
Soit la variable aléatoire X est le nombre de succès dont la loi de probabilité est la loi binomiale.

3 points

1) La probabilité pour qu'un joueur obtienne 1 ou 6 exactement 3 fois est :

$$P(X = 3) = C_{5}^{3} p^3 q^2 = 10 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243} \approx 0,16$$

2 points

2) La probabilité pour qu'un joueur obtienne 1 ou 6 au moins une fois est :

$$1 - P(X = 0) = 1 - C_{5}^{0} p^0 q^5 = 1 - 1 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{243 - 32}{243} = \frac{211}{243} \approx 0,87$$

2 points

3. On jette 2 fois un dé non truqué. Soit Y la variable aléatoire "somme des points obtenus".

1)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

De la table des sommes on déduit la loi de probabilité de Y :

y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3 points

2) La probabilité de l'événement "la somme des points obtenus est inférieure ou égale à 7" est :

$$P(Y \leqslant 7) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \approx 0,58$$

2 points

Question 3

1. Foyer $F(7,0)$directrice associée $d \equiv x-2=0$ excentricité $\epsilon = \frac{3}{2}$

   1) équation focale $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
d(M,F) &= \epsilon d(M,d) \\
(d(M,F))^2 &= \epsilon^2 (d(M,d))^2 \\
(x-7)^2+y^2 &= \tfrac{9}{4}(x-2)^2 \\
4(x^2-14x+49+y^2) &= 9(x^2-4x+4) \\
4x^2-4\cdot 14x+4\cdot 49+4y^2 &= 9x^2-9\cdot 4x+4\cdot 9 \\
4x^2-9x^2+9\cdot 4x-4\cdot 14x+4y^2 &= 4\cdot 9-4\cdot 49 \\
-5x^2-5\cdot 4x+4y^2 &= -4\cdot 40 \\
x^2+4x-\tfrac{4}{5}y^2 &= 4\cdot 8 \\
x^2+4x+4-\tfrac{4}{5}y^2 &= 4\cdot 8+4 \\
(x+2)^2-\tfrac{4}{5}y^2 &= 4\cdot 9 \\
\tfrac{(x+2)^2}{36}-\tfrac{y^2}{45} &= 1 \qquad \text{équation réduite dans}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}) \\
\tfrac{X^2}{36}-\tfrac{Y^2}{45} &= 1 \qquad \text{équation réduite dans } (\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath}) \text{ avec } \Omega(-2,0)
\end{aligned}$$

   2) $\mathcal{H}$ est une hyperbole de centre Ω et d'axe focal l'axe des x

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 3\sqrt{5} \end{cases} \Longrightarrow c^2 = a^2+b^2 = 36+45 = 81 \Longrightarrow c = 9$$

Les foyers $F(9,0)$ et $F'(-9,0)$
et les directrices $d \equiv X = \frac{36}{9}$ et $d' \equiv X = -\frac{36}{9}$ dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
c'est à dire :
$F'(-11,0)$ et $d' \equiv x = -6$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

6 points

2.

$$\mathcal{P} \equiv (y-1)^2 = 2(x-2)$$

1) Posons

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X & = & x-2 \\ Y & = & y-1 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \Omega(2,1)$$

alors :

$$\mathcal{P} \equiv Y^2 = 2X$$

et $\mathcal{P}$ est une parabole d' axe focal dans la direction de l'axe des x de ~~centre~~ sommet Ω et de paramètre $p = 1$ Le foyer $F(\frac{p}{2}, 0)$ dans $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ a pour coordonnée $F(\frac{5}{2}, 1)$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

2) Méthode rapide en appliquant la théorie à :

$$\mathcal{P} \equiv (y-1)^2 = 2(x-2) \text{ au point } P(4,3)$$

$$t \equiv (3-1)(y-1) = (x-2) + (4-2) \equiv y = \frac{1}{2}x + \cancel{2}\,1$$

Autres méthodes possibles.

3)

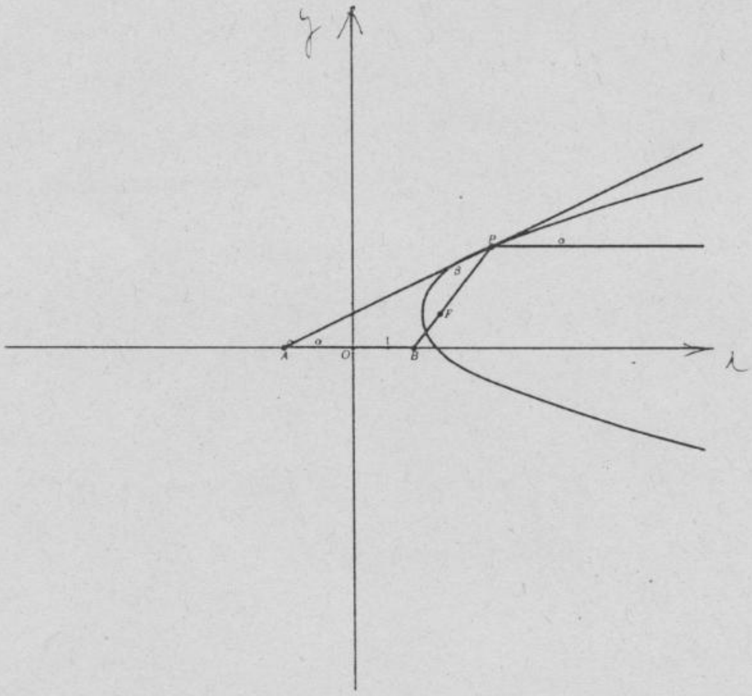

FIG. 2 – Efes04Fig03.mps

4) Une propriété optique des paraboles (figure $\alpha = \beta$) et un théorème des droites parallèles coupées par une même sécante permettent d'affirmer que le triangle PAB est isocèle en B.

9 points

Question 4

(points $2+5+2+4+2$)

On donne l'ensemble de points Γ_1 par un système d'équations paramétriques :

$$\Gamma_1 \equiv \begin{cases} x &= 4\sin 3t \\ y &= 4\cos 2t \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$$

1. Soient :

$$M(t) = M(x,y) = M(4\sin 3t, 4\cos 2t)$$
$$M(-t) = M'(x',y') = M'(4\sin 3(-t), 4\cos 2(-t)) = M'(-4\sin 3t, 4\cos 2t) = M'(-x,y)$$
$$t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Longrightarrow -t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

La courbe Γ_1 est symétrique par rapport à l'axe des y.

2.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x	0	4	$2\sqrt{2}$	0	-4
y	4	2	0	-2	-4

3. Γ_1

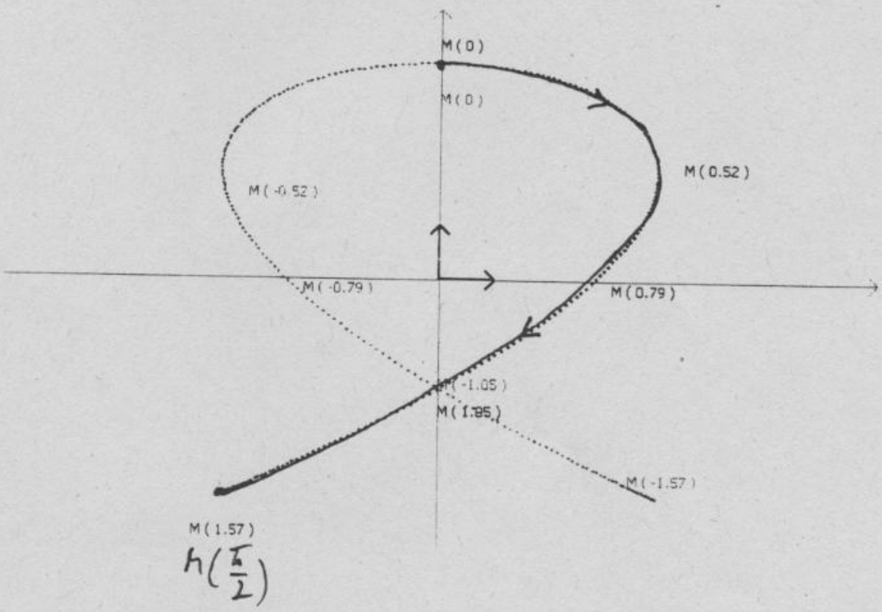

FIG. 3 – Efes04Fig04.jpg

4.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \geqslant -t \geqslant -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} \geqslant \pi - t \geqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leqslant \pi - t \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

$$M(t) = M(x,y) = M(4\sin 3t, 4\cos 2t)$$

$$\begin{aligned} M(\pi - t) &= M'(x', y') \\ &= M'(4\sin 3(\pi - t), 4\cos 2(\pi - t)) \\ &= M'(4\sin(\pi - 3t), 4\cos(-2t)) \\ &= M'(4\sin 3t, 4\cos 2t) \\ &= M'(x, y) \\ &= M(t) \end{aligned}$$

donc $M(\pi - t) = M(t)$ pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

5. $\Gamma_2 = \Gamma_1$ avec sens de parcours inverse.
   x et y ayant pour plus petite période commune 2π
   $\Gamma = \Gamma_1$ et elle est parcourue dans les deux sens au cours de chaque période.