Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2004

Section : B

Branche : MATHÉMATIQUES 1

Nom et prénom du candidat :

....

....

Question 1

1. Soit (points 8 + 7)

$$P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 1 - i \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

   1) Déterminer α et β sachant que $-i$ est une racine de P et que le reste de la division de P par $z+1$ est $2i+2$.
   2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ après avoir remplacé α et β par les valeurs trouvées sous 1).

2. Dans le plan de Gauss on donne les points A d'affixe $z_A = 3 + 2i$ et B d'affixe $z_B = -\sqrt{2} - 5i\sqrt{2}$
   1) Calculer $\frac{z_B}{z_A}$ et donner le résultat sous forme trigonométrique.
   2) En déduire que B est l'image de A par la composée d'une rotation r et d'une homothétie h desquelles on précisera les caractéristiques (centres, angle et rapport).
   3) Illustrer les deux transformations r et h à l'aide d'une figure précise.

Question 2

(points 3 + 7 + 5)

1. Combien de mots de 3 consonnes différentes et de 2 voyelles différentes peut-on former avec 21 consonnes et 5 voyelles ? (Les mots ont un sens ou non).
2. On jette 5 fois un dé non truqué. On gagne si on obtient 1 ou 6.
   1) Calculer la probabilité pour qu'un joueur obtienne 1 ou 6 exactement 3 fois.
   2) Calculer la probabilité pour qu'un joueur obtienne 1 ou 6 au moins une fois.
3. On jette 2 fois un dé non truqué. Soit Y la variable aléatoire "somme des points obtenus".
   1) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   2) Calculer la probabilité de l'événement "la somme des points obtenus est inférieure ou égale à 7".

...

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2004	Nom et prénom du candidat :
Section : B	....
Branche : MATHÉMATIQUES 1	....

Question 3

(points 6 + 9)

1. Soit la conique $\mathcal{H}$ de foyer $F(7,0)$, de directrice associée $d \equiv x - 2 = 0$ et d'excentricité $\epsilon = \frac{3}{2}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   1) Déterminer une équation focale et une équation réduite de $\mathcal{H}$.
   2) Après avoir précisé la nature de $\mathcal{H}$, déterminer la coordonnée de son second foyer F' et une équation de sa seconde directrice d' dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Soit la conique $\mathcal{P}$ d'équation $(y-1)^2 = 2(x-2)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   1) Déterminer la nature de la conique $\mathcal{P}$ et la coordonnée de son foyer F.
   2) Déterminer une équation de la tangente t à $\mathcal{P}$ au point $P(4,3)$.
   3) Dessiner la conique $\mathcal{P}$ ainsi que les droites t et PF.
   4) Utiliser une propriété optique des coniques pour préciser la nature du triangle PAB sachant que A et B sont les points d'intersection respectifs des droites t et PF avec l'axe des x.

Question 4

(points 2 + 5 + 2 + 4 + 2)

On donne l'ensemble de points Γ_1 par un système d'équations paramétriques :

$$\Gamma_1 \equiv \begin{cases} x = 4\sin 3t \\ y = 4\cos 2t \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$$

1. Déterminer un élément de symétrie de Γ_1.
2. Calculer les coordonnées des points $M(t)$ pour $t \in \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$ et dessiner la partie de Γ_1 pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ en marquant le sens de parcours.
3. Compléter Γ_1 par symétrie.
4. Montrer l'implication $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \pi - t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ et l'égalité $M(\pi - t) = M(t)$ pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
5. En déduire les courbes Γ_2 et Γ suivantes :

$$\Gamma_2 \equiv \begin{cases} x = 4\sin 3t \\ y = 4\cos 2t \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2} \qquad\qquad \Gamma \equiv \begin{cases} x = 4\sin 3t \\ y = 4\cos 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$