Examen de fin d'études secondaires.
Section $\boxed{B}$. Maths 1. Septembre 2002.

I

1° $$z^2 + 3(1 - i\sqrt{3})z - 6(1 + i\sqrt{3}) = 0.$$

$\delta = 9(1-i\sqrt{3})^2 + 24(1+i\sqrt{3}) = 9(-2-2i\sqrt{3}) + 24 + 24i\sqrt{3} = 6(1+i\sqrt{3})$.

Posons : $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 6 + 6i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ xy = 3\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 6 & (1) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{36 + 36\cdot 3} = 12 & (2) \\ xy > 0 & (3) \end{cases}$

$(1)+(2)$: $2x^2 = 18$
$x = 3$ ou $x = -3$

$(2)-(1)$: $2y^2 = 6$
$y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$.

racines carrées de δ : $\varepsilon(3 + i\sqrt{3})$ avec $\varepsilon^2 = 1$.

P.c. $z' = \dfrac{-3(1-i\sqrt{3}) + 3 + i\sqrt{3}}{2} = 2i\sqrt{3}$; $z'' = \dfrac{-3(1-i\sqrt{3}) - 3 - i\sqrt{3}}{2} = -3 + i\sqrt{3}$

$S_{\mathbb{C}} = \{2i\sqrt{3} ; -3 + i\sqrt{3}\}$.

Notation pour la suite :
$z_1 = 2i\sqrt{3}$
$z_2 = -3 + i\sqrt{3}$.

2° $a = z_1 z_2 = 2i\sqrt{3}(-3+i\sqrt{3}) = -6(1+i\sqrt{3})$ $|a| = 12$.

$a = 12\left(-\frac{6}{12} - \frac{6\sqrt{3}}{12}i\right) = 12\cdot e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

Racines carrées de a : $z''_k = 2\sqrt{3}\cdot e^{i(-\frac{\pi}{3} + k\pi)}$ avec $k \in \{0,1\}$.

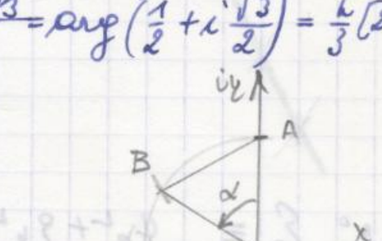
c.à.d. $z''_0 = 2\sqrt{3}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z''_1 = 2\sqrt{3}\, e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

3° dans le plan de Gauss : $O(0)$; $A(2i\sqrt{3})$; $B(-3 + i\sqrt{3})$.

On a : $OA = \|\vec{OA}\| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$; $OB = \|\vec{OB}\| = |-3+i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
P.c. $\exists$ une rotation r d'angle orienté α et de centre O tel que $r(A) = B$: $r = rot(O, \alpha)$.

$\alpha = (\overline{\vec{OA}, \vec{OB}}) = (\overline{\vec{OB}, \vec{e_1}}) - (\overline{\vec{OA}, \vec{e_1}}) = \arg(-3+i\sqrt{3}) - \arg(2i\sqrt{3})$
$= \arg \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} \cdot \dfrac{(-i\sqrt{3})}{(-i\sqrt{3})} = \arg \dfrac{3 + 3i\sqrt{3}}{6} = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

Donc le $\Delta(OAB)$ est équilatéral.



II

10 boules $= 3b + 2v + 5N$.

1° Valeurs possibles pour X : $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.

chaque boule tirée étant remise dans l'urne avant le tirage suivant, les 3 tirages sont indépendants.

$p(X=0) = \left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{343}{1000}$

$p(X=1) = 3\cdot\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{441}{1000}$ car la b peut être tirée lors du 1ᵉʳ, 2ᵉ ou 3ᵉ tirage : $3 = C_3^1$.

$p(X=2) = 3\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^2\cdot\frac{7}{10} = \frac{189}{1000}$ car il y a $3 = C_3^2$ positions possibles pour les b.

$p(X=3) = \left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{27}{1000}$.

Loi de probabilités :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)=f(x_i)$	$\frac{343}{1000}$	$\frac{441}{1000}$	$\frac{189}{1000}$	$\frac{27}{1000}$

espérance mathématique :

$$E(X)=\sum_i x_i f(x_i) = 0\cdot\frac{343}{1000}+1\cdot\frac{441}{1000}+2\cdot\frac{189}{1000}+3\,\frac{27}{1000}=\frac{900}{1000}=\frac{9}{10}.$$

2° a) comme il n'y a que 2 v, on a :

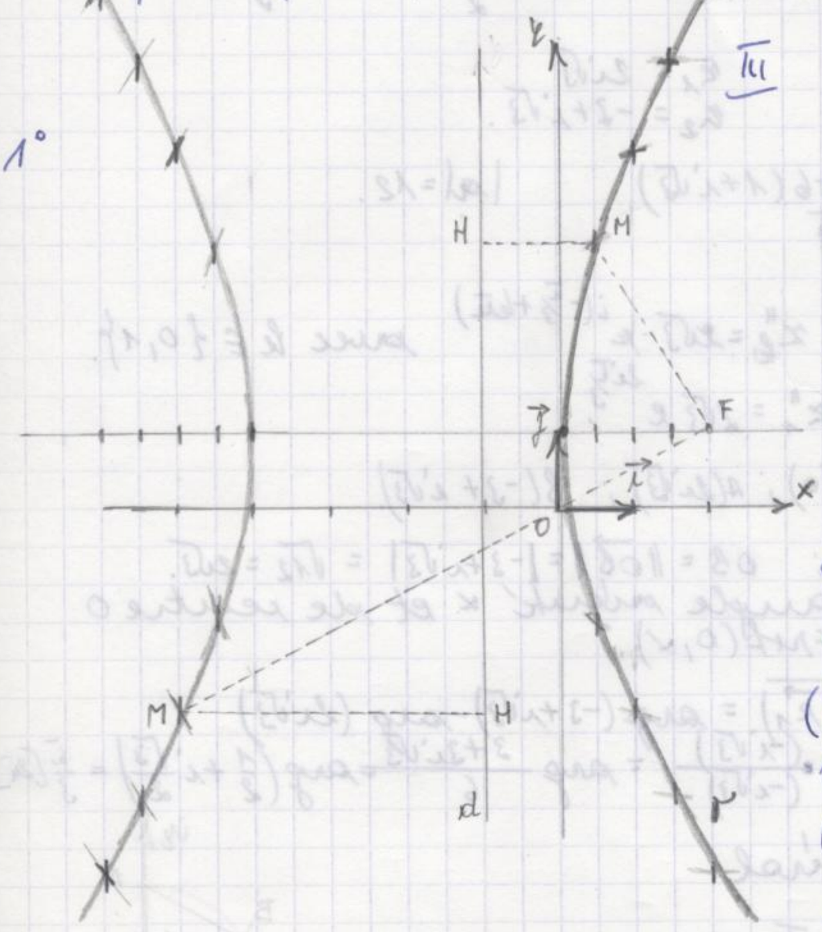
$$p(A)=p(3N)+p(3b)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}+\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}+\frac{1}{120}=\frac{11}{120}$$

$$p(B)=p(1N1b1v)=\frac{C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{5\cdot3\cdot2}{120}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$$

$$p(C)=1-[p(A)+p(B)]=1-\left(\frac{11}{120}+\frac{1}{4}\right)=\frac{120-11-30}{120}=\frac{79}{120}.$$

$$p(D)=p(C)+p(A)=\frac{79+11}{120}=\frac{90}{120}=\frac{3}{4}.$$

1°



$e=2 \Rightarrow \Gamma$ est une hyperbole.

$M(x,y)\in\Gamma \Leftrightarrow e=\frac{MF}{MH} \Leftrightarrow MF=e\cdot MH.$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=2\cdot\frac{|x+1|}{\sqrt{1}}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=4(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x+\cancel{4}+y^2-2y+1=4x^2+8x+\cancel{4}$

$\Leftrightarrow 3x^2+12x-(y-1)^2=0$

$\Leftrightarrow 3(x^2+4x+4)-(y-1)^2=12$

$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{12}=1.$

(forme normale de d : $\frac{x+1}{\sqrt{1}}=0$. distance de M à d : $\frac{|x+1|}{\sqrt{1}}$.)

(Construction à l'aide d'une seule directrice d et d'un seul foyer F : $MF=e\cdot MH$.)

2° b) $\mathcal{E} \equiv 4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$ RON$(O,\vec{i},\vec{j})$.

$\Leftrightarrow 4(x^2+2x+1)+9(y^2-4y+4)=-4+4+36$

$\Leftrightarrow 4(x+1)^2+9(y-2)^2=36$ $\quad|:36$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

centre $\Omega(-1;2)$. translation des axes en Ω. équations de translation : $\begin{cases}X=x+1\\Y=y-2\end{cases}$

RON$(\Omega,\vec{i},\vec{j})$: $\frac{X^2}{3^2}+\frac{Y^2}{2^2}=1$

donc : $a=3$ et $b=2$; $c^2=a^2-b^2=9-4=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}.$

Tableau :

RON$(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$	RON$(O, \vec{i}, \vec{j})$.	
$A(3,0)$ $A'(-3,0)$ $B(0,2)$ $B'(0,-2)$	$A(2,2)$ $A'(-4,2)$ $B(-1,4)$ $B'(-1,0)$	sommets.
$F(\sqrt5,0)$ $F'(-\sqrt5,0)$	$F(\sqrt5-1,2)$; $F'(-\sqrt5-1,2)$	foyers
$x=\frac{9\sqrt5}{5}$; $x'=-\frac{9\sqrt5}{5}$	$x=\frac{9\sqrt5}{5}-1$; $x'=-\frac{9\sqrt5}{5}-1$	directrices

* Équations des tangentes t.

$t \equiv x = 4$ manifestement impossible

$t \equiv y = mx + h$ et $K(4,0) \in t \iff 0 = 4m + h \iff h = -4m$

donc : $y = mx - 4m$.

$$t \cap \mathcal{E} : \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 & (1) \\ y = mx - 4m & (2) \end{cases}$$

$(2) \to (1)$: $4[x+1]^2 + 9(mx - 4m - 2)^2 = 36$

$\iff 4(x^2+2x+1) + 9(m^2x^2 + 16m^2 + 4 - 8m^2x - 4mx + 16m) = 36$

$\iff (4+9m^2)x^2 + (8 - 72m^2 - 36m)x + 144m^2 + 144m + 4 = 0$

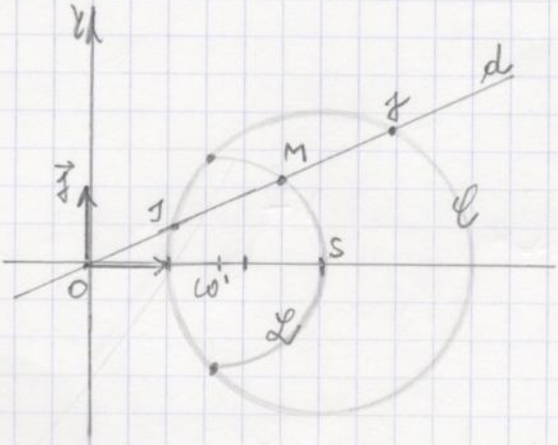
$\Delta' = b'^2 - ac = 4(2 - 9m + 18m^2)^2 - (4+9m^2)(144m^2 + 144m + 4)$ $\quad -1296m^2 - 36\ldots$

$\Delta' = 4(4 + 81m^2 + 324m^4 - 36m + 72m^2 - 324m^3 - 576m^2 - 576m - 16 - 1296m^3$

$\Delta' = -4 \cdot 144m\,(m + 5/4)$.

$\Delta' = 0 \iff m = 0$ ou $m = -\frac54$ donc 2 tangentes : $t' \equiv y = 0$; $t'' \equiv y = -\frac54 x + 5$.

N.B. La méthode du dédoublement ne s'applique pas, car le point $K(4,0) \notin \mathcal{E}$. De plus la méthode du dédoublement est seulement valable pour une courbe (conique) du 2e degré.



IV

* Si $d = (Oy)$ alors d ne coupe pas $\mathcal{C}$.
Une équation cartésienne de d est : $y = mx$ $(m \in \mathbb{R})$.

* Équation de $\mathcal{C}$: $(x-3)^2 + y^2 = 4$.

* Soit $\mathcal{L}$ le lieu cherché. Comme (Ox) est axe de symétrie pour la figure, déterminons la partie du lieu située à $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

Notons ce lieu $\mathcal{L}_1$. Dans ce cas $m \geq 0$.

* Détermination des coordonnées de I et de J :

$$\begin{cases} y = mx & (1) \\ (x-3)^2 + y^2 = 4 & (2) \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R}_+).$$

$(1) \to (2)$: $(x-3)^2 + m^2x^2 = 4$

$\iff (1+m^2)x^2 - 6x + 5 = 0$.

$\Delta' = 9 - 5(1+m^2) = 4 - 5m^2$.

$\Delta' = 0 \iff m^2 = \frac{4}{5} \iff m = \pm \frac{4}{2\sqrt5} = \pm \frac{2\sqrt5}{5}$.

m		$-\frac{2\sqrt5}{5}$		0		$\frac{2\sqrt5}{5}$	
Δ'	$-$		$+$		$+$	0	$-$

si $m \in [0 ; \frac{2\sqrt5}{5}[$ alors d coupe $\mathcal{C}$ en 2 points.

$x_1 = \frac{3+\sqrt{4-5m^2}}{1+m^2}$; $y_1 = m x_1 \Rightarrow I(x_1, y_1)$

Soit $M(x,y) = \text{mil}[I,J]$.

$x_2 = \frac{3-\sqrt{4-5m^2}}{1+m^2}$; $y_2 = m x_2 \Rightarrow J(x_2, y_2)$.

$x = \frac12(x_1+x_2) = \frac12 \cdot \frac{6}{1+m^2} = \frac{3}{1+m^2}$ et $y = \frac12(y_1+y_2) = \frac{m}{2}(x_1+x_2) = \frac{3m}{1+m^2}$.

$M(x,y) \in \mathcal{L}_1 \iff \begin{cases} x = \frac{3}{1+m^2} \\ y = \frac{3m}{1+m^2} \end{cases}$ et $m \in [0 ; \frac{2\sqrt5}{5}[$, on constate que $x \geq$ et $y \geq 0$.

$\iff \begin{cases} m^2 = \frac{3}{x} - 1 \\ y = \frac{3m}{1+m^2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{3\sqrt{\frac{3}{x}-1}}{1+\frac{3}{x}-1} \\ x \in [\frac53 ; 3] \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \in [\frac53 ; 3] \\ y \geq 0 \\ y^2 = \frac{9(\frac{3}{x}-1)}{\frac{9}{x^2}} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [\frac53 ; 3] \\ y \geq 0 \\ y^2 = x^2(\frac{3}{x}-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [\frac53 , 3] \\ y \geq 0 \\ y^2 - 3x + x^2 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \in [\frac53 , 3] \\ y \geq 0 \\ (x - \frac32)^2 + y^2 = \frac94 \end{cases}$ (*')

(*') est l'équation du cercle $\mathcal{C}'$ de centre $\omega'(\frac32, 0)$ et de rayon $\frac32$.

$\mathcal{L}_1$ est la partie de $\mathcal{C}'$ limitée à $[\frac53, 3]$ et $y \geq 0$.

$\mathcal{L}$ est la partie de $\mathcal{C}'$ limitée à $[\frac53, 3]$.