

I

1° 
$$z^2 + 3(1 - i\sqrt{3})z - 6(1 + i\sqrt{3}) = 0.$$

$$\Delta = 9(1 - i\sqrt{3})^2 + 24(1 + i\sqrt{3}) = 9(-2 - 2i\sqrt{3}) + 24 + 24i\sqrt{3} = 6(1 + i\sqrt{3}).$$

Posons: 
$$\begin{cases} (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 6 + 6i\sqrt{3} \\ \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ xy = 3\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{36 + 36 \cdot 3} = 12 \\ xy > 0 \end{cases} \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

(1)+(2):  $x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$   
 (2)-(1):  $2y^2 = 6 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

racines carrées de  $\delta$ :  $\varepsilon(3 + i\sqrt{3})$  avec  $\varepsilon^3 = 1$ .  
 P.e.  $z_1 = \frac{-3(1 - i\sqrt{3}) + 3 + i\sqrt{3}}{2} = 2i\sqrt{3}$ ;  $z_2 = \frac{-3(1 - i\sqrt{3}) - 3 - i\sqrt{3}}{2} = -3 + i\sqrt{3}$

$$N_{\mathbb{C}} = \{2i\sqrt{3}; -3 + i\sqrt{3}\}$$

Notation par la suite:  $z_1 = 2i\sqrt{3}$   
 $z_2 = -3 + i\sqrt{3}$

2°  $R = z_1 z_2 = 2i\sqrt{3}(-3 + i\sqrt{3}) = -6(1 + i\sqrt{3}) \quad |a| = 12.$

$$R = 12 \left(-\frac{6}{12} - \frac{6\sqrt{3}}{12}i\right) = 12 \cdot e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

racines carrées de  $a$ :  $z_k = 2\sqrt{3} \cdot e^{i(-\frac{2}{3} + k\pi)}$  avec  $k \in \{0, 1\}$ .

r.-à.-d.  $z_0 = 2\sqrt{3} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$  et  $z_1 = 2\sqrt{3} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3° sans le plan de Gauss:  $O(0); A(2i\sqrt{3}); B(-3 + i\sqrt{3})$ .

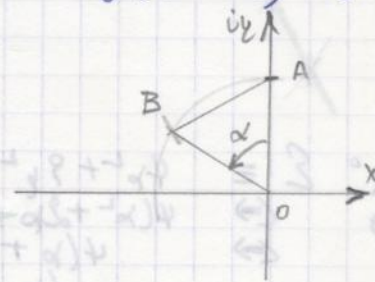
on a:  $OA = |\vec{OA}| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ ;  $OB = |\vec{OB}| = |-3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

P.e.  $\exists$  une rotation  $N$  d'angle orienté  $\alpha$  et de centre  $O$  tel que  $N(A) = B$ :  $z = N(A)(O, \alpha)$ .

$$\alpha = (\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OB}, \vec{e}_1) - (\vec{OA}, \vec{e}_1) = \arg(-3 + i\sqrt{3}) - \arg(2i\sqrt{3})$$
  

$$= \arg \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} \cdot \frac{(i\sqrt{3})}{(-i\sqrt{3})} = \arg \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{6} = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

donc le  $\Delta(OAB)$  est équilatéral.



II

10 boules = 3b + 2o + 5v.

1° valeurs possibles pour  $X$ :  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ .

Chaque boule tirée doit renvoyer dans l'une ou l'autre le tirage suivant, les 3 tirages sont indépendants.

$$P(X=0) = \left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{343}{1000}$$
  

$$P(X=1) = 3 \cdot \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{441}{1000}$$
  

$$P(X=2) = 3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \frac{7}{10} = \frac{189}{1000}$$
  

$$P(X=3) = \left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{27}{1000}$$

car la b peut être tirée lors du 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup> ou 3<sup>e</sup> tirage:  $3 = C_3^1$ .  
 les 3 boules peuvent être tirées parilye  $3 = C_3^3$  parois possibles pour les b.

Loi de probabilités:

$x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i) = f(x_i)$	$\frac{343}{1000}$	$\frac{441}{1000}$	$\frac{189}{1000}$	$\frac{27}{1000}$

espérance mathématique:

$$E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = 0 \cdot \frac{343}{1000} + 1 \cdot \frac{441}{1000} + 2 \cdot \frac{189}{1000} + 3 \cdot \frac{27}{1000} = \frac{900}{1000} = \frac{9}{10}$$

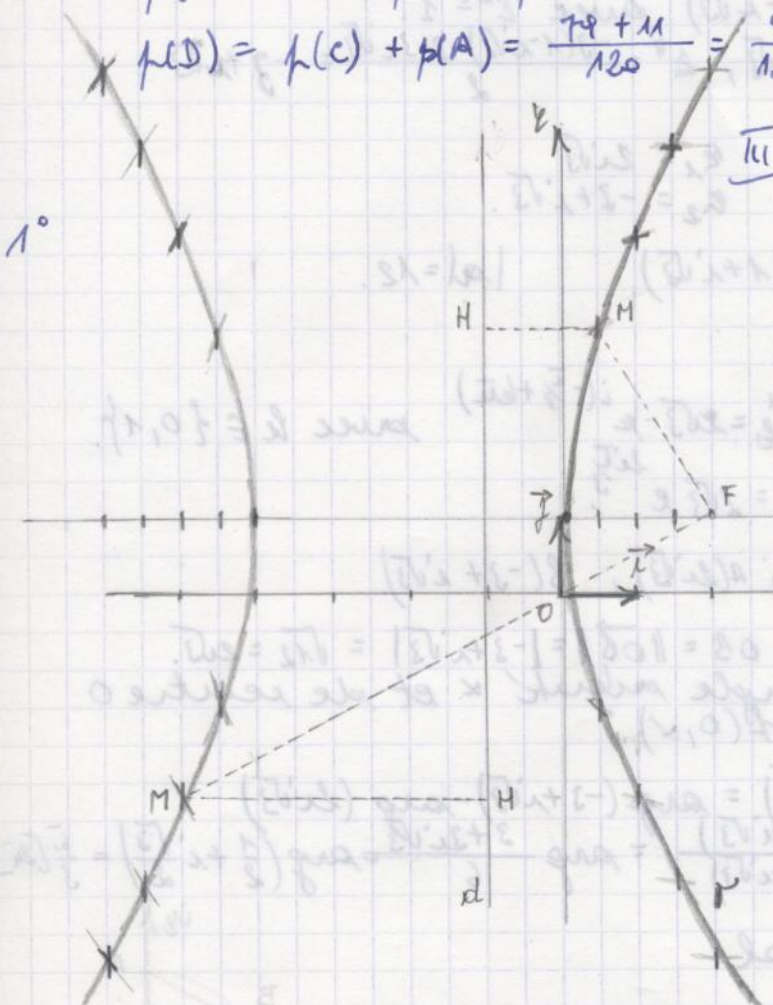
2°) course de u'ya que  $3,5$ , un  $Q$ :

$$P(A) = P(3N) + P(3b) = \frac{C_3^5}{C_3^{10}} + \frac{C_3^3}{C_3^{10}} = \frac{10}{120} + \frac{1}{120} = \frac{11}{120}$$

$$P(B) = P(1N1b1v) = \frac{C_5^1 C_3^{10} C_2^1}{C_3^{10}} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 2}{120} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = 1 - [P(A) + P(B)] = 1 - \left(\frac{11}{120} + \frac{1}{4}\right) = \frac{120 - 11 - 30}{120} = \frac{79}{120}$$

$$P(D) = P(C) + P(A) = \frac{79 + 11}{120} = \frac{90}{120} = \frac{3}{4}$$



$e = 2 \Rightarrow \Gamma$  est une hyperbole.

$$M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow e = \frac{MF}{MH} \Leftrightarrow MF = e \cdot MH$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 2 \cdot \frac{|x+1|}{\sqrt{1}}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4x^2 + 8x + 4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 12x - (y-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + 4x + 4) - (y-1)^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$$

(forme normale de  $d$ :  $\frac{x+1}{\sqrt{1}} = 0$   
distance de  $\Gamma$  à  $d$ :  $\frac{|x+1|}{\sqrt{1}}$ .)

(construction à l'aide d'une seule directrice  $d$  et d'un seul foyer  $F$ :  $MF = e \cdot MH$ .)

$$2^\circ \quad \Sigma \equiv 4x^2 + 9y^2 + 8x - 26y + 4 = 0$$

RON  $(0, \vec{e}, \vec{f})$ .

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) = -4 + 4 + 36$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 + 9(y-2)^2 = 36 \quad | : 36$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

centre  $\Omega(-1; 2)$ . Translations des axes en  $\Omega$  :  $X = x+1$   
équations de translations :  $Y = y-2$

$$RON(\Omega, \vec{i}, \vec{j}) : \frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1$$

donc:  $a=3$  et  $b=2$ ;  $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$ .

Tableau:

RON( $\Omega, \vec{i}, \vec{j}$ )		RON( $O, \vec{i}, \vec{j}$ )		
A(3, 0)	A'(-3, 0)	A(2, 2)	A'(-4, 2)	Sommets.
B(0, 2)	B'(0, -2)	B(-1, 4)	B'(-1, 0)	
F( $\sqrt{5}, 0$ )	F'(- $\sqrt{5}, 0$ )	F( $\sqrt{5}-1, 2$ ); F'(- $\sqrt{5}-1, 2$ )		Foyers
$x = \frac{9\sqrt{5}}{5}; x' = -\frac{9\sqrt{5}}{5}$		$x = \frac{9\sqrt{5}}{5}-1; x' = -\frac{9\sqrt{5}}{5}-1$		Directrices

\* Equation des tangentes t.

$t \equiv x = 4$  manifestement impossible

$t \equiv y = mx + h$  et  $K(4, 0) \in t \Leftrightarrow 0 = 4m + h \Leftrightarrow h = -4m$   
donc:  $y = mx - 4m$ .

$$t \cap \mathcal{E} : \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 & (1) \\ y = mx - 4m & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow (1) : 4[x+1]^2 + 9(mx-4m-2)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2+2x+1) + 9(m^2x^2 + 16m^2 + 4 - 8m^2x - 4mx + 16m) = 36$$

$$\Leftrightarrow (4+9m^2)x^2 + (8-72m^2-36m)x + 144m^2 + 144m + 4 = 0$$

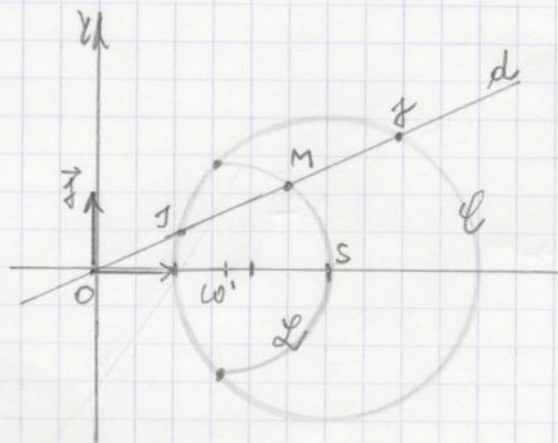
$$\Delta' = b^2 - 4ac = (8-72m^2-36m)^2 - (4+9m^2)(144m^2 + 144m + 4) \quad -1296m^2 - 36m$$

$$\Delta' = 4(4+81m^2+324m^2-36m+72m^2-324m^3-576m^2-576m-16-1296m^3)$$

$$\Delta' = -4 \cdot 144m(m+54)$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m=0 \text{ or } m = -\frac{5}{4} \text{ donc 2 tangentes : } t^1 \equiv y=0 \text{ et } t^2 \equiv y = -\frac{5}{4}x + 5.$$

a) B. La méthode du doublement ne s'applique pas, car le point  $K(4, 0) \notin \mathcal{E}$ . La plus la méthode du doublement est seulement valable pour une courbe (conique) du 2<sup>e</sup> degré.



IV

Si  $d = (Oy)$  plus d'une tangente pas l.  
c, e, d. une équation cartésienne de  $d$  est:  $y = mx$  ( $m \in \mathbb{R}$ ).

Equation de  $\mathcal{E}$ :  $(x-3)^2 + y^2 = 4$ .

Soit  $\mathcal{L}$  le lieu cherché. Comme  $(Ox)$  est l'axe de symétrie pour la figure, décrire la partie du lieu dans  $\mathcal{E}$  et  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

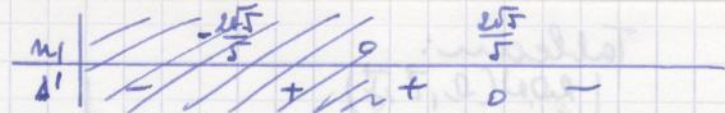
Noter le lieu  $\mathcal{L}_1$ . Sans ce cas  $m \geq 0$ .

\* Alternative des conduites de  $\mathcal{E}$  de  $J$ :

$$\begin{cases} x = mx \\ (x-3)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad (m \in \mathbb{R}^+).$$

$$(1) \rightarrow (2) : \begin{aligned} &(x-3)^2 + m^2x^2 = 4 \\ \Leftrightarrow &(1+m^2)x^2 - 6x + 5 = 0. \\ \Delta' = &9 - 5(1+m^2) = 4 - 5m^2. \end{aligned}$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow m = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



Si  $m \in [0; \frac{2\sqrt{5}}{5}]$  alors il y a deux points.

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{4 - 5m^2}}{1 + m^2}; \quad y_1 = mx_1 \Rightarrow f(x_1, y_1)$$

$$\text{Soit } \eta(x, y) = \min\{f, g\}$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{4 - 5m^2}}{1 + m^2}; \quad y_2 = mx_2 \Rightarrow f(x_2, y_2)$$

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{1 + m^2} = \frac{3}{1 + m^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{m}{2}(x_1 + x_2) = \frac{3m}{1 + m^2}$$

$$M(x, y) \in \mathcal{L}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{1 + m^2} \\ y = \frac{3m}{1 + m^2} \end{cases} \quad \text{et } m \in [0; \frac{2\sqrt{5}}{5}]; \quad m \text{ croissante pour } x \nearrow \text{ et } y \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \frac{3}{x} - 1 \\ y = \frac{3m}{1 + m^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3\sqrt{\frac{3}{x} - 1}}{1 + \frac{3}{x} - 1} \\ x \in [\frac{3}{5}; 3] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [\frac{3}{5}; 3] \\ y \geq 0 \\ y^2 = \frac{9(\frac{3}{x} - 1)}{\frac{3}{x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [\frac{3}{5}; 3] \\ y \geq 0 \\ y^2 = x^2(\frac{3}{x} - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [\frac{3}{5}; 3] \\ y \geq 0 \\ y^2 - 3x + x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [\frac{3}{5}; 3] \\ y \geq 0 \\ (x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4} \quad (*) \end{cases}$$

(\*) est l'équation du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\omega(\frac{3}{2}, 0)$  et de rayon  $\frac{3}{2}$ .

$\mathcal{L}_1$  est la partie de  $\mathcal{C}$  limitée à  $x \in [\frac{3}{5}, 3]$  et  $y \geq 0$ .

$\mathcal{L}$  est la partie de  $\mathcal{C}$  limitée à  $x \in [\frac{3}{5}, 3]$ .

