Examen de fin d'études secondaires.
Section [B] Maths 1 le 20 sept. 2003.

I

1° $\frac{x^2+i}{x^2-i} = 3\cdot\frac{x^2-1}{x^2+1}$ Existence: $x^2 = i = \text{cis}\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \text{cis}\frac{\pi}{4}$ ou $x = \text{cis}\frac{5\pi}{4}$.
$x^2 = -1 = \text{cis}\,\pi \Leftrightarrow x = \text{cis}\frac{\pi}{2}$ ou $x = \text{cis}\frac{3\pi}{2}$.

L'équation existe $\forall x \in \mathbb{C} - \{\text{cis}\frac{\pi}{4}; \text{cis}\frac{5\pi}{4}; \text{cis}\frac{\pi}{2}; \text{cis}(-\frac{\pi}{2})\}$.

Posons $z = x^2$: $\frac{z+i}{z-i} = 3\cdot\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z^2 - 2(1+i)z + i = 0$

$\delta' = (1+i)^2 - i = i = \text{cis}\frac{\pi}{2} = [\pm 1\cdot\text{cis}\frac{\pi}{4}]^2$; rac. de δ': $\text{cis}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}$ et $\text{cis}\frac{5\pi}{4}$.

$z_1 = \frac{2(1+i)+\sqrt2+i\sqrt2}{2} = \frac{2+\sqrt2}{2}(1+i)$ et $z_2 = \frac{1+i-\frac{\sqrt2}{2}(1+i)}{1} = \frac{2-\sqrt2}{2}(1+i)$

c.à.d. $x^2 = z_1 = \frac{2+\sqrt2}{2}\cdot\sqrt2\,\text{cis}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)$ et $x^2 = z_2 = \frac{2-\sqrt2}{2}\cdot\sqrt2\,\text{cis}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)$

donc: $x_1 = \sqrt{1+\sqrt2}\cdot\text{cis}\frac{\pi}{8}$ $(k=0)$ $x_3 = \sqrt{\sqrt2-1}\cdot\text{cis}(\frac{\pi}{8})$ $(k=0)$

$x_2 = \sqrt{1+\sqrt2}\cdot\text{cis}\frac{9\pi}{8}$ $(k=1)$ $x_4 = \sqrt{\sqrt2-1}\cdot\text{cis}\frac{9\pi}{8}$ $(k=1)$

Solution: $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

2° $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \mapsto z' = f(z) = -iz$

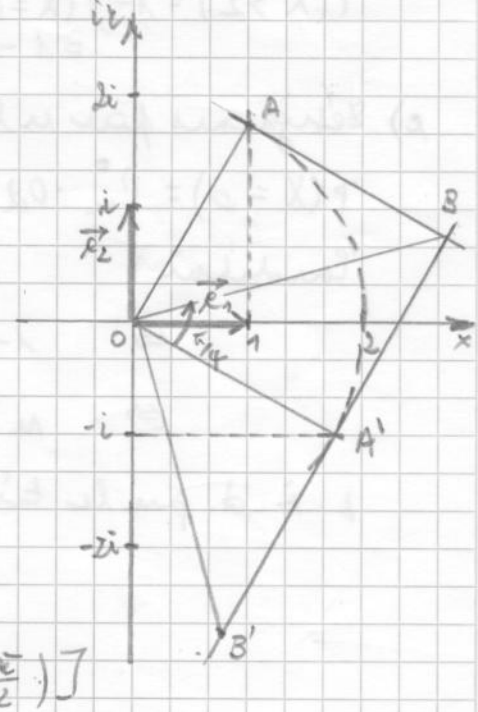
a) On a: $z' = f(z) = -iz \Leftrightarrow z' - 0 = e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot(z-0) \Rightarrow f = \text{rot}(O, \frac{3\pi}{2})$

b) $A' = f(A) \Leftrightarrow z_{A'} = -i(1+i\sqrt3) = \sqrt3 - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c) $\|\vec{OB}\| = |z_B| = 2\sqrt2$ (diagonale d'un carré de côté 2).

$(\widehat{\vec{OA'}, \vec{OB}}) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (\vec{e_1}, \vec{OB}) - (\vec{e_1}, \vec{OA'}) = \frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow \arg z_B - \arg z_{A'} = \frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow \arg z_B = \frac{\pi}{4} + (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{12}$.

donc: $z_B = 2\sqrt2\cdot e^{i\frac{\pi}{12}}$.



d) $B' = f(B) \Leftrightarrow z_{B'} = -iz_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot 2\sqrt2\cdot e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\sqrt2\cdot e^{-\frac{5i\pi}{12}}$

$A' = \text{mil}[B,B'] \Leftrightarrow z_{A'} = \frac{1}{2}(z_B + z_{B'})$

On a: $\frac{1}{2}(z_B + z_{B'}) = \frac{2\sqrt2}{2}\left[e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-\frac{5i\pi}{12}}\right]$

$= \sqrt2\left[(\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{-5\pi}{12}) + i\cdot(\sin\frac{\pi}{12} + \sin\frac{-5\pi}{12})\right]$

$= \sqrt2\cdot\left[2\cos(-\frac{4\pi}{24})\cdot\cos\frac{6\pi}{24} + 2i\cdot\sin(-\frac{4\pi}{24})\cdot\cos\frac{6\pi}{24}\right]$

$= 2\sqrt2\left(\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\right) = \sqrt3 - i = z_{A'}$!

II

1° card $\Omega = C^2_{100}$

a) X peut prendre les valeurs 0, 50, 100, 150.

x_i	0	50	100	150
p_i	$\frac{C^2_{98}}{C^2_{100}}$	$\frac{98}{C^2_{100}}$	$\frac{98}{C^2_{100}}$	$\frac{1}{C^2_{100}}$

car:

$P(X=0) = \dfrac{C_{98}^2}{C_{100}^2}$ car il y a 98 billets non gagnants.

$P(X=50) = \dfrac{98}{C_{100}^2}$ car il y a 1 lot gagnant et 98 billets non gagnants.

$P(X=100) = \dfrac{98}{C_{100}^2}$ (même raisonnement)

$P(X=150) = \dfrac{1}{C_{100}^2}$ car il faut obtenir les 2 billets gagnants, ce qui ne peut intervenir qu'une seule fois.

b.) $E(X) = \sum_i x_i p_i = \dfrac{1}{C_{100}^2}\left[0\cdot C_{98}^2 + 50\cdot 98 + 100\cdot 98 + 150\cdot 1\right] = 3$

$V(X) = \sum_i p_i\left[E(X) - x_i\right]^2 = \dfrac{1}{C_{100}^2}\left[C_{98}^2(3-0)^2 + 98(3-50)^2 + 98(3-100)^2 + (3-150)^2\right]$

$= \dfrac{1}{4950}(4953\cdot 9 + 98\cdot 2209 + 98\cdot 9409 + 21609) \simeq 243,02$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq \sqrt{243,02} \cong 15,59$

2° C'est un schéma de Bernoulli avec X : n^{bre} de fois que le tireur atteint le but.
Loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,2$

a) $P(X=5) = C_{10}^5\, 0,2^5 \cdot 0,8^5 \simeq 0,0264$

b.) Raisonnons à l'aide de l'évt contraire : atteindre 0 fois ou 1 fois le but :

$P(X > 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - C_{10}^0\, 0,2^0 \cdot 0,8^{10} - C_{10}^1\, 0,2^1 \cdot 0,8^9$
$= 1 - (0,8^{10} + 2\cdot 0,8^9) \simeq 0,6242$

c) Désignons par n le n^{bre} de tirs à effectuer :

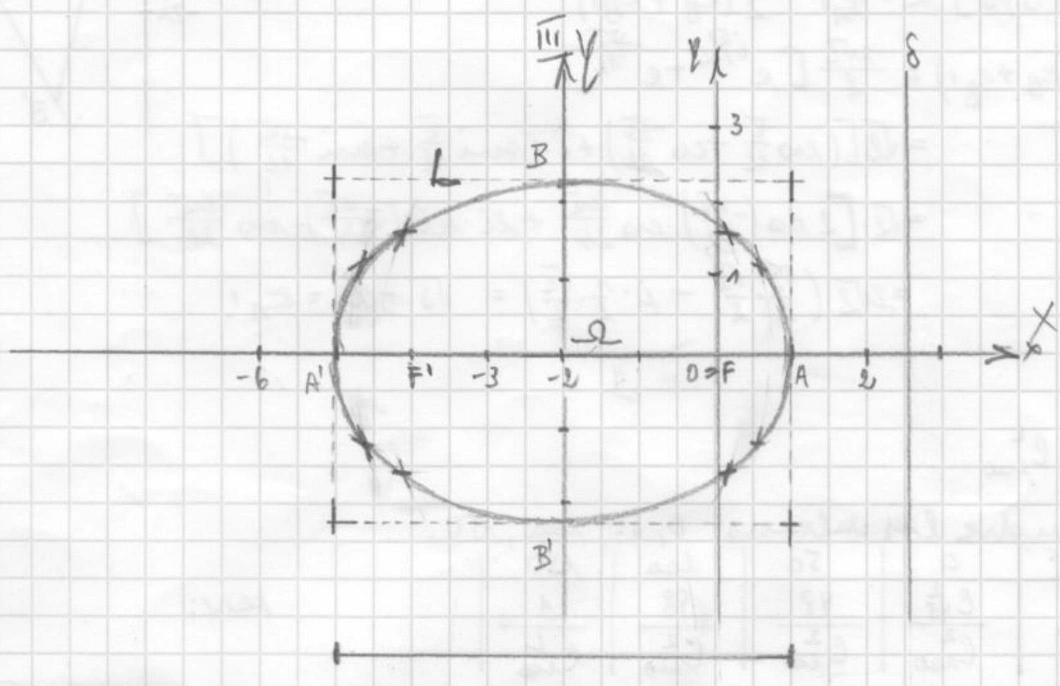
$P(X=0) = C_n^0 \cdot 0,2^0 \cdot (0,8)^n$.

Condition : $1 - P(X=0) \geqslant \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 1 - C_n^0\, 0,2^0 \cdot 0,8^n \geqslant \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0,8^n \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow n\cdot\log 0,8 \leq \log\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{-\log 4}{\log 0,8} \simeq 6,2126$

c.à.d. que le tireur doit tirer au moins 7 fois.



1° $M(x,y) \in L \Leftrightarrow OM = \frac{2}{3} \cdot d(M,\delta)$ RON$(O,\vec{i},\vec{j})$

$\Leftrightarrow OM^2 = \frac{4}{9} \cdot [d(M,\delta)]^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{4}{9} \cdot (x - \frac{5}{2})^2$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 9y^2 = 4x^2 - 20x + 25$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 20x + 9y^2 = 25$

$\Leftrightarrow 5(x^2+4x+4) + 9y^2 = 25 + 20 \quad |:45$

$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-0)^2}{5} = 1$

Effectuons une translation des axes en $\Omega(-2,0)$.

Équations de translation : $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y \end{cases}$

RON$(\Omega,\vec{i},\vec{j})$: $\frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$

C'est l'équation réduite d'une ellipse de centre Ω avec $a=3$; $b=\sqrt{5}$.

$c^2 = a^2 - b^2 = 4 \Rightarrow c = 2$; $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} < 1$; un des foyers est l'origine O

Sommets : $A(1,0)$ $A'(-5,0)$

$B(-2,\sqrt{5})$ $B'(-2,-\sqrt{5})$.

2° RON$(O,\vec{i},\vec{j})$ $\mathcal{H} \equiv x^2 - 6y^2 + 12y - 18 = 0$

Tangente (t) de pente $m = \frac{1}{2}$: $y = \frac{1}{2}x + b$

Système : $\begin{cases} x^2 - 6y^2 + 12y - 18 = 0 & (1) \\ y = \frac{1}{2}x + b & (2) \end{cases}$

$(2) \to (1)$ $x^2 - 6(\frac{1}{2}x + b)^2 + 12(\frac{1}{2}x + b) - 18 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6(\frac{1}{4}x^2 + bx + b^2) + 6x + 12b - 18 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + 3x(b-1) + 3b^2 - 6b + 9 = 0$

C'est l'équation aux abscisses des points d'intersection.

Condition de tangence : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 9(b-1)^2 - (3b^2 - 6b + 9) = 0$

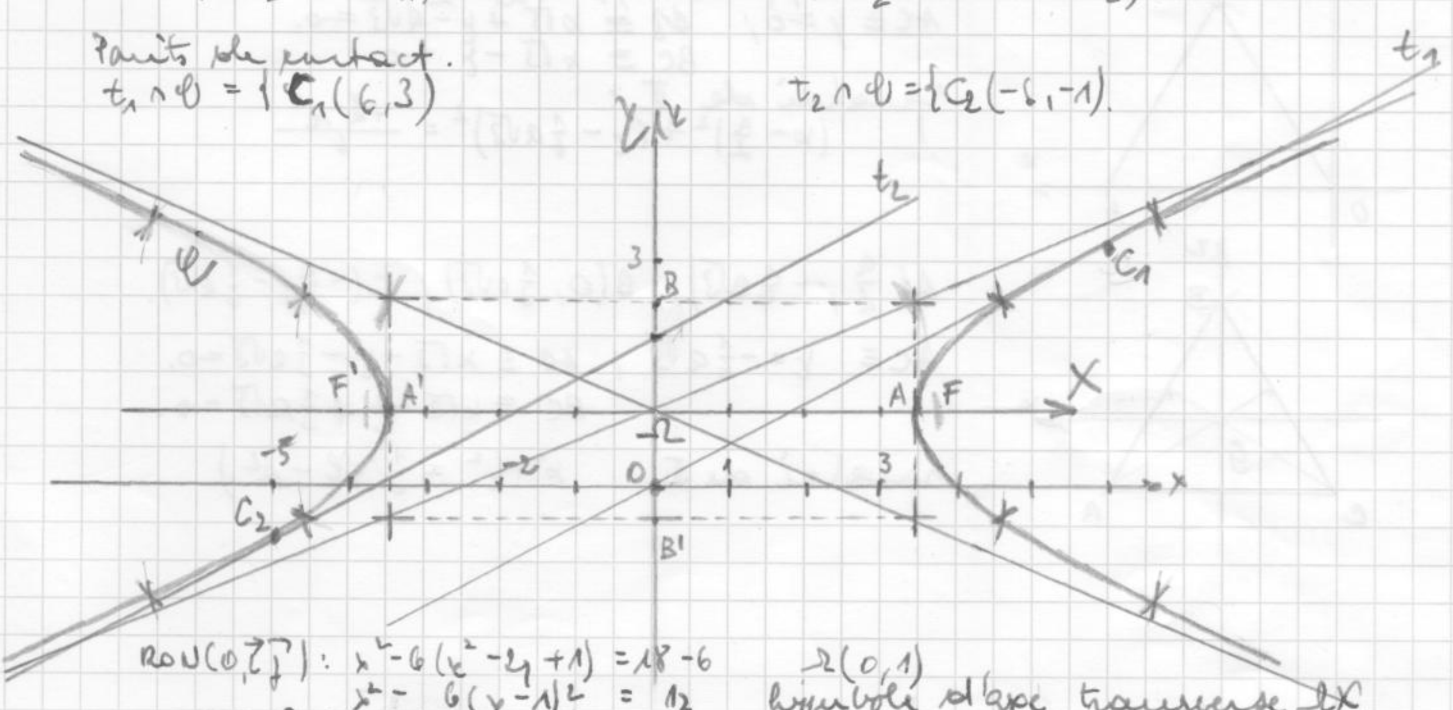
$\Leftrightarrow 6b^2 - 12b = 0 \quad |:6$

$\Leftrightarrow b(b-2) = 0$

$b = 0 \to y = \frac{1}{2}x \quad (t_1)$ ou $b = 2 \to y = \frac{1}{2}x + 2 \quad (t_2)$

Points de contact.

$t_1 \cap \mathcal{H} = \{C_1(6,3)\}$ $t_2 \cap \mathcal{H} = \{C_2(-6,-1)\}$



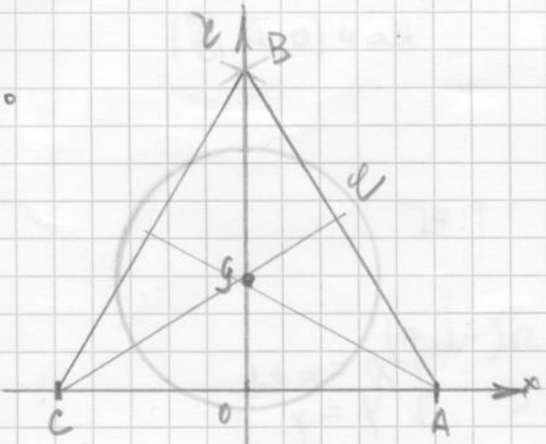
RON$(O,\vec{i},\vec{j})$: $x^2 - 6(y^2 - 2y + 1) = 18 - 6$ $\Omega(0,1)$

$x^2 - 6(y-1)^2 = 12$ hyperbole d'axe transverse ΩX.

RON$(\Omega,\vec{i},\vec{j})$: $\frac{X^2}{(2\sqrt{3})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ $a = 2\sqrt{3}$; $b = \sqrt{2}$.

IV

1°



Repère $(O,\vec{i},\vec{j})$: O = mil $[A,C]$.

Posons : $A(\frac{a}{2};0)$; $C(-\frac{a}{2};0)$; $B(0;a\frac{\sqrt3}{2})$.

Équations de

AB : $\frac{x}{\frac{a}{2}}+\frac{y}{a\frac{\sqrt3}{2}}=1 \iff x\sqrt3+y=a\cdot\frac{\sqrt3}{2}$

BC : $\frac{x}{-\frac{a}{2}}+\frac{y}{\frac{a\sqrt3}{2}}=1 \iff -x\sqrt3+y=a\frac{\sqrt3}{2}$.

AC : $y=0$.

$M(x,y)\in\Gamma \iff [d(M,AC)]^2+[d(M,AB)]^2+[d(M,BC)]^2=k$.

$\iff y^2+\frac{(|x\sqrt3+y-\frac{a\sqrt3}{2}|)^2}{4}+\frac{(|-x\sqrt3+y-\frac{a\sqrt3}{2}|)^2}{4}=k$

$\iff 6y^2+6x^2-2a\sqrt3\,y+\frac{3}{2}a^2=4k$

$\iff x^2+(y-a\frac{\sqrt3}{6})^2=\frac{4k-a^2}{6}$

Discussion : • $4k-a^2<0 \Rightarrow \Gamma=\emptyset$

• $4k-a^2=0 \Rightarrow \Gamma=\{G\}$ avec $G(0;\frac{1}{6}a\sqrt3)$

G : centre de gravité du Δ car $OG=\frac{1}{3}OB=\frac{1}{6}a\sqrt3$

• $4k-a^2>0 \Rightarrow \Gamma$ est le cercle de centre G et de $r=\sqrt{\frac{4k-a^2}{6}}$.

2° $a=6$; $k=15 \Rightarrow (4k-a^2)\frac{1}{6}=4>0 \Rightarrow \Gamma=\mathcal{C}(G,2)$

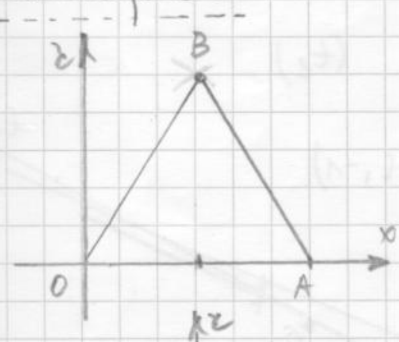
3° Γ passe par les 3 sommets du Δ lorsque : $AG=BG=CG=\sqrt{\frac{4k-a^2}{6}}$.

et $BG=\frac{1}{3}a\sqrt3$; donc : $\frac{1}{3}a\sqrt3=\sqrt{\frac{4k-a^2}{6}}$ | carré

$\iff \frac{a^2}{3}=\frac{1}{6}(4k-a^2)$ | ·6

$\iff 4k=3a^2 \iff k=\frac{3}{4}a^2$.

Remarque :



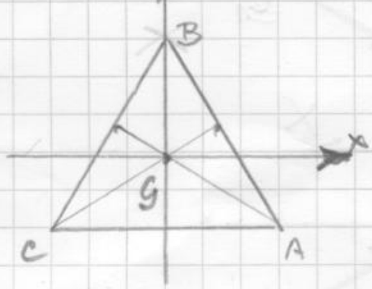
$O=C(0,0)$; $A(a,0)$; $B(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt3}{2})$

$AC\equiv y=0$; $AB\equiv x\sqrt3+y-a\sqrt3=0$.

$BC\equiv x\sqrt3-y=0$.

équation de Γ :

$(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{1}{6}a\sqrt3)^2=\frac{4k-a^2}{6}$



$A(\frac{a}{2};-\frac{1}{6}a\sqrt3)$; $B(0,\frac{1}{3}a\sqrt3)$; $C(-\frac{a}{2};-\frac{1}{6}a\sqrt3)$.

$AC\equiv y=-\frac{1}{6}a\sqrt3$; $AB\equiv x\sqrt3+y-\frac{1}{3}a\sqrt3=0$.

$BC\equiv x\sqrt3-y+\frac{1}{3}a\sqrt3=0$.

équation de Γ : $x^2+y^2=\frac{1}{6}(4k-a^2)$.