Réponse 1

1)

a) $P(z)=z^4+4z^3+6z^2+(6-2i)z+3-2i$. Soit a un réel.

$P(a)=0 \quad \Leftrightarrow a^4+4a^3+6a^2+6a-2ai+3-2i=0$

$\Leftrightarrow (a^4+4a^3+6a^2+6a+3)+(-2a-2)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4+4a^3+6a^2+6a+3=0 \\ -2a-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^4+4\bullet(-1)^3+6\bullet(-1)^2+6\bullet(-1)+3=0 \\ a=-1=z_0. \end{cases}$

Donc $P(z)$ est divisible par $z+1$: $P(z)=(z+1)\left(\underbrace{z^3+3z^2+3z+3-2i}_{Q(z)}\right)$.

b) $Q(i)=i^3+3i^2+3i+3-2i=0$, donc $Q(z)$ est divisible par $z-i$

$Q(z)=(z-i)\left(\underbrace{z^2+(3+i)z+3i+2}_{R(z)}\right)$.

Posons $R(z)=0$. $\Delta=(3+i)^2-4\bullet(3i+2)=-6i=6cis\dfrac{3\pi}{2}$

$\rho=\sqrt{6}cis\dfrac{3\pi}{4}=-\sqrt{3}+\sqrt{3}i$ est une racine carrée de Δ.

Donc $R(z)=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-\sqrt{3}-3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$ ou $z=\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}+\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}i$.

Conclusion : $P(z)=0 \Leftrightarrow z\in\left\{\underbrace{-1}_{z_0};\underbrace{i}_{z_1};\underbrace{\dfrac{-\sqrt{3}-3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i}_{z_2};\underbrace{\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}+\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}i}_{z_3}\right\}$.

c)

$$\overline{M_1M_2}^2=|z_2-z_1|^2=\left|\frac{-\sqrt{3}-3}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i-i\right|^2=\left(\frac{-\sqrt{3}-3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)^2=6$$

$$\overline{M_1M_3}^2=|z_3-z_1|^2=\left|\frac{\sqrt{3}-3}{2}+\frac{-\sqrt{3}-1}{2}i-i\right|^2=\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{3}-3}{2}\right)^2=6$$

$$\overline{M_2M_3}^2=|z_3-z_2|^2=\left|\frac{\sqrt{3}-3}{2}+\frac{-\sqrt{3}-1}{2}i-\frac{-\sqrt{3}-3}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}i\right|^2=\left|\sqrt{3}-\sqrt{3}i\right|^2=6$$

Ainsi, le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

$$\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)=\frac{1}{3}\bullet\left(i+\frac{-\sqrt{3}-3}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i+\frac{\sqrt{3}-3}{2}+\frac{-\sqrt{3}-1}{2}i\right)=-1=z_0.$$

Donc M_0 est le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$.

Réponse 2

1) $\left(\frac{1}{3}x-9\sqrt[3]{x}\right)^{10} =\sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i}\left(\frac{1}{3}x\right)^{10-i}\left(-9x^{\frac{1}{3}}\right)^{i}=\sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-i}(-9)^{i}\,x^{10-i+\frac{i}{3}}$

Condition : $10-i+\frac{i}{3}=8 \Leftrightarrow \frac{2}{3}i=2 \Leftrightarrow i=3$

Terme en x^8 : $C_{10}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{7}(-9)^{3}\,x^{8}=-40x^{8}$

2)

a) Chaque naissance est une épreuve de Bernoulli. Appelons succès la naissance d'un veau mâle, et échec celle d'une femelle. Alors $p=0,51$ et $q=1-0,51=0,49$. Les naissances étant indépendantes, on répète donc 8 fois une épreuve de Bernoulli dans les mêmes conditions, et on obtient un schéma de Bernoulli. La v.a. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=0,51$. $\left(\forall k\in\{0;1;...;8\}\right)\quad P\left(X=k\right)=C_{8}^{k}\bullet 0,51^{k}\bullet 0,49^{8-k}$

$P\left(X=8\right)=C_{8}^{8}\bullet 0,51^{8}\bullet 0,49^{0}\simeq 0,004577$.

La probabilité pour que l'agriculteur vende tous ses veaux, donc celle pour que les vaches donnent naissance uniquement à des veaux mâles, est égale à $\pm 0,004577$.

b) $E\left(X\right)=n\bullet p=8\bullet 0,51=4,08$

$\sigma\left(X\right)=\sqrt{npq}=\sqrt{8\bullet 0,51\bullet 0,49}=\sqrt{1,9992}\simeq 1,413931$

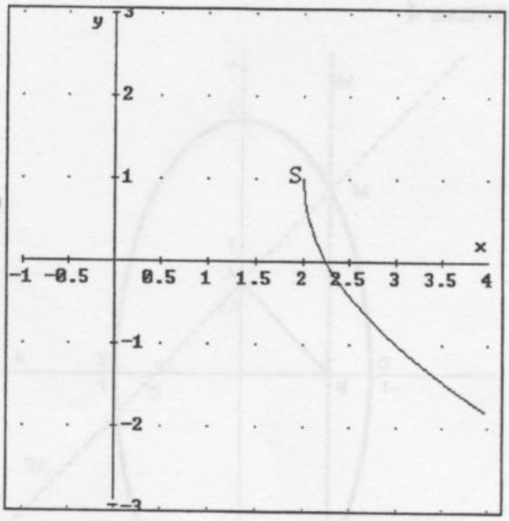
c) Les vaches peuvent donner naissance à au plus 5 veaux femelles, donc au moins 3 des veaux doivent être mâles.

$$
\begin{aligned}
P\left(X\geq 3\right) &=1-P\left(X<3\right)\\
&=1-\left(P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)\right)\\
&=1-\left(0,49^{8}+8\bullet 0,51\bullet 0,49^{7}+28\bullet 0,51^{2}\bullet 0,49^{6}\right)\\
&\simeq 0,868202
\end{aligned}
$$

Réponse 3

1)

$$\begin{aligned} M(x;y)\in C \quad &\Leftrightarrow y=1-\sqrt{4x-8} \text{ et } 4x-8\geq 0 \\ &\Leftrightarrow y-1=-\sqrt{4x-8} \text{ et } 4x-8\geq 0 \\ &\Leftrightarrow (y-1)^2=4x-8 \text{ (et } x\geq 2\text{) et } y-1\leq 0 \\ &\Leftrightarrow (y-1)^2=4(x-2) \text{ (et } x\geq 2\text{) et } y\leq 1 \end{aligned}$$



C est donc un arc de parabole de sommet $S(2;1)$

(d'axe focal $m\equiv y=1$ et de paramètre p=2)

2)

$M\in\Gamma \Leftrightarrow \overline{AM}+\overline{BM}=10$. Notons $2a=10\Leftrightarrow a=5$

D'autre part, notons $2c=\overline{AB}\Leftrightarrow 2c=6\Leftrightarrow c=3$.

Comme $c<a$, il s'agit d'une ellipse dont A et B sont les foyers, donc d'axe focal $m\equiv y=2$.

Le centre Ω de Γ est le milieu de $[AB]$, donc $\Omega(5;2)$. Nous avons :

$c^2=a^2-b^2\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}\Leftrightarrow b=\sqrt{5^2-3^2}\Leftrightarrow b=4$. Ainsi, $\boxed{\Gamma\equiv\dfrac{(x-5)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1}$

3)

a) $M(x;y)\in L$

$\Leftrightarrow d(M;F)=e\cdot d(M;d)$

$\Leftrightarrow \overline{MF}^2=e^2\,\overline{MH}^2$ avec $H\left(x;\dfrac{24}{5}\right)$

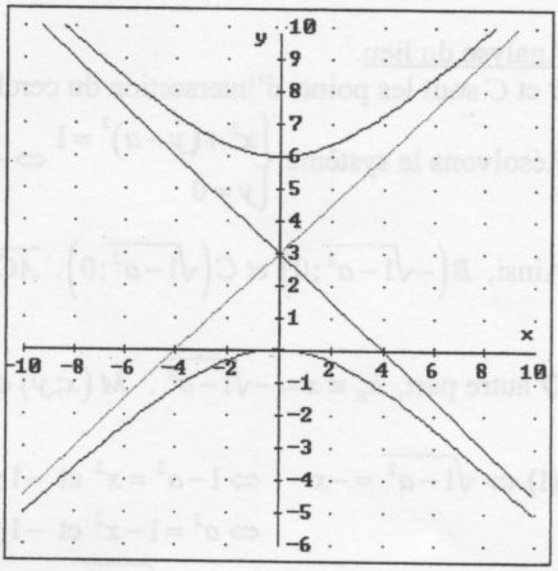
$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-8)^2=\dfrac{25}{9}\left(y-\dfrac{24}{5}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-16y+64=\dfrac{25}{9}y^2-\dfrac{2\cdot 25\cdot 24}{9\cdot 5}y+\left(\dfrac{\cancel{25}\cdot 24^2}{9\cdot \cancel{5^2}}\right)$

$\Leftrightarrow x^2-\dfrac{16}{9}y^2+\dfrac{32}{3}y=0$

$\Leftrightarrow x^2-\dfrac{16}{9}\left(y^2-6y+9\right)+16=0$

$\Leftrightarrow x^2-\dfrac{16}{9}(y-3)^2=-16$



Donc $\boxed{L\equiv\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=-1}$

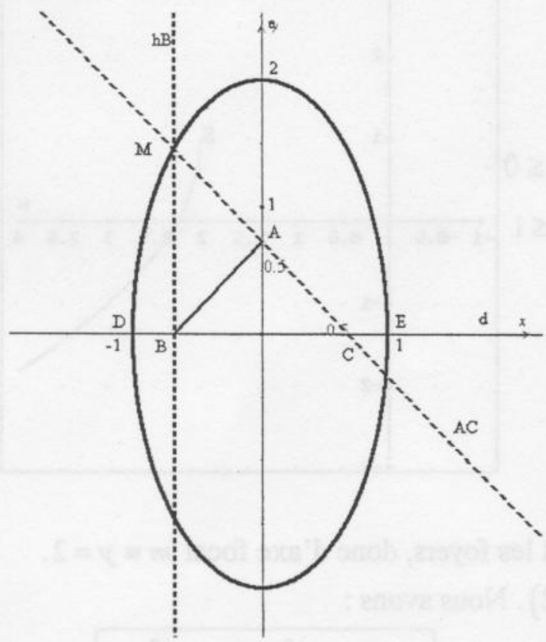
b) Une des asymptotes de L a comme équation cartésienne $y=\dfrac{3}{4}x+3$.

Soit $\Delta\equiv y=\dfrac{3}{4}x+t \quad (t\in\mathbb{R})$ une droite de coefficient angulaire $\dfrac{3}{4}$.

Si $t=3$, alors il s'agit d'une asymptote oblique de L, qui n'est pas tangente à L.

Si $t\neq 3$, alors il s'agit d'une sécante de L. Ainsi, il n'existe pas de tangente de c.a. $\dfrac{3}{4}$.

Réponse 4



Choix du repère
Soit un r.o.n. de centre O, point d'intersection de d et de e, dont d est l'axe des abscisses de e est l'axe des ordonnées. Dans ce repère, $A(0;a)$, avec $-1 \le a \le 1$.

Partie singulière du lieu
Notons h_B la parallèle à e menée par B.
Si $a = 1$ ou $a = -1$, alors $B = C = O$, et $h_B = AC = e$.
$h_B \cap AC = e$, partie singulière du lieu.
Supposons dans la suite que $-1 < a < 1$.

Cas particulier
D'autre part, si $B = C$ (les points n'étant pas nécessairement distincts), alors $h_B \cap AC = h_B \cap AB = \{B\}$. Ainsi, le segment de droite [DE], avec $D(-1\ ;\ 0)$ et $E(1\ ;\ 0)$, privé du point O, est aussi une partie du lieu.

Supposons dans la suite $B \neq C$.
Axes de symétrie
Comme Ox et Oy sont des axes de symétrie du lieu, il suffit de l'étudier pour $0 \le a < 1$, et $-1 \le x_B < 0$ (donc $0 < x_C \le 1$). Notons L' ce lieu.

Analyse du lieu
B et C sont les points d'intersection du cercle de centre A et de rayon 1 avec Ox.

Résolvons le système $\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 - a^2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{1-a^2} \text{ ou } x = \sqrt{1-a^2} \\ y = 0 \end{cases}$.

Ainsi, $B\left(-\sqrt{1-a^2};0\right)$ et $C\left(\sqrt{1-a^2};0\right)$. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \sqrt{1-a^2} \\ -a \end{pmatrix}$ et $AC \equiv -ax - \sqrt{1-a^2}\,y + a\sqrt{1-a^2} = 0$.

D'autre part, $h_B \equiv x = -\sqrt{1-a^2}$. $M(x;y) \in L' \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{1-a^2} & (1) \\ -ax - \sqrt{1-a^2}\,y + a\sqrt{1-a^2} = 0 & (2) \end{cases}$

$$\begin{aligned}
(1) \Leftrightarrow \sqrt{1-a^2} = -x \quad & \Leftrightarrow 1 - a^2 = x^2 \text{ et } -1 \le x < 0 \\
& \Leftrightarrow a^2 = 1 - x^2 \text{ et } -1 \le x < 0 \\
& \Leftrightarrow a = \sqrt{1-x^2} \text{ et } -1 \le x < 0 \text{ car } 0 \le a < 1
\end{aligned}$$

Par (2), nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{1-x^2}\bullet x - (-x)\,y + \sqrt{1-x^2}\bullet(-x) = 0 \,\Big|\, :(-x) \neq 0 && \text{et } -1 \le x < 0 \\
& \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} - y + \sqrt{1-x^2} = 0 && \text{et } -1 \le x < 0 \\
& \Leftrightarrow y = 2\sqrt{1-x^2} && \text{et } -1 \le x < 0 \\
& \Leftrightarrow y^2 = 4\left(1-x^2\right) \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 && \text{et } -1 \le x < 0 \text{ et } 0 \le y < 2
\end{aligned}$$

Le lieu L' est donc un quart de l'ellipse Γ de centre O, d'axe focal Oy, de grand axe 4 et de petit axe 1. L' est la partie de l'ellipse reliant les sommets $D(-1\ ;0)$ et $S(0\ ;2)$, fermée en D et ouverte en S.
Lieu proprement dit Le lieu L est la réunion de l'ellipse Γ, de la droite e et du segment de droite [DE].