Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2004 **Section : B** **Branche : Mathématiques I**	**Nom et prénom du candidat :** ____________________ ____________________

Question 1

1) On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6-2i)z + 3 - 2i$.
   a) Montrer que $P(z)$ possède une racine réelle unique z_0 que l'on déterminera.
   En déduire une factorisation de $P(z)$ sous la forme $(z - z_0)Q(z)$, où $Q(z)$ est un polynôme complexe de degré 3 que l'on précisera.
   b) Vérifier que i est une racine de $Q(z)$, et en déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
   c) Soient dans le plan complexe les points $M_0(z_0), M_1(z_1), M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$, z_1, z_2 et z_3 étant les racines de $Q(z)$.
   Montrer que $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral dont le centre de gravité est M_0

15 points

Question 2

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1) Calculer le terme en x^8 dans le développement de $\left(\frac{1}{3}x - 9\sqrt[3]{x}\right)^{10}$.

2) Un agriculteur élève des vaches limousines. Comme le cours de la viande a chuté, il décide de ne vendre que les veaux mâles et d'augmenter son cheptel en conservant les femelles. Il attend 8 naissances dans son troupeau. Chaque naissance donne un veau mâle avec une probabilité $p = 0{,}51$. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de veaux mâles parmi ces 8 naissances.

   a) Préciser la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Justifier de façon détaillée votre choix. Calculer la probabilité pour que l'agriculteur vende tous les veaux.

   b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

   c) Son troupeau est constitué de 12 bêtes, et son étable peut en accueillir 17. Calculer la probabilité pour que le troupeau auquel ont été ajoutées les jeunes vaches de l'année puisse tenir dans l'étable.

   Donner une valeur approchée à 10^{-6} près des résultats.

15 points

Epreuve écrite

Question 3

Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1) Donner la nature de la courbe $C \equiv y = 1 - \sqrt{4x-8}$; dessiner C (unité : 1 cm).
2) On considère les points $A(2;2)$ et $B(8;2)$. Donner la nature de l'ensemble $\Gamma = \left\{ \mathrm{M} \in \pi \,\middle|\, \overline{\mathrm{AM}} + \overline{\mathrm{BM}} = 10 \right\}$, et établir son équation cartésienne réduite.
3) On considère le point $F(0;8)$ et la droite $d \equiv y = \frac{24}{5}$.

   On considère le lieu L des points du plan dont la distance à F vaut les $\frac{5}{3}$ de leur distance à la droite d.

   a) Etablir une équation cartésienne de L, et construire L par une méthode au choix.

   b) Peut-on trouver des tangentes à L de coefficient angulaire égal à $\frac{3}{4}$? Justifier.

15 points

Question 4

Soient d et e deux droites perpendiculaires et A, B, et C des points mobiles (non nécessairement distincts) tels que A varie sur e, B et C varient sur d et $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$.

Déterminer et préciser la nature géométrique du lieu des points M communs à la droite AC et à la parallèle à e menée par B.

15 points