

Examen de fin d'études secondaires 2001

Section: B

Guin

Branche: Mathématiques II

Nom et prénom du candidat

- I) 1) Démontrer : a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$  avec  $\alpha > 0$
- 2) démontrer : a) pour tout a, b dans  $\mathbb{R}$  :  $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$   
 b) pour tout a dans  $\mathbb{R}$  :  $\exp(-a) = \frac{1}{\exp a}$
- 3) soient deux réels a et b tels que  $a < b$   
 démontrer: si f est une fonction continue positive sur  $[a; b]$

$$\text{alors } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

II) soit la fonction f :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 

$$x \mapsto f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

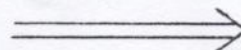
- 1) domaine de définition, de continuité et de dérivabilité
- 2) limites et comportement asymptotique
- 3) dérivée et tableau de variation
- 4) définir le prolongement par continuité g de f à gauche au point 0 ;  
étudier la dérivabilité de g à gauche au point 0 ; en déduire l'existence d'une demi-tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative C de g
- 5) tracer la courbe C dans un repère orthonormé (unité : 2cm)  
indiquer la demi-tangente au point d'abscisse 0
- 6) calculer l'aire A(m) de la partie du plan déterminée par la courbe C, par l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations  $x = 1$  et  $x = m$  avec  $m \in \mathbb{R}_+$   
calculer  $\lim_{m \rightarrow +\infty} A(m)$

III) soit la fonction  $f_m$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par:

$$\begin{cases} f_m(x) = x (\ln x)^m & \text{si } x > 0 \\ f_m(0) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } m \in \mathbb{N}^*$$

soit  $C_m$  la courbe représentative de  $f_m$ 

- 1) étude de  $f_1$  : a) continuité et dérivabilité en 0  
 b) limites et comportement asymptotique  
 c) dérivée et tableau de variation





Examen de fin d'études secondaires 2001

Section: B

Juria

Branche: Mathématiques II

Nom et prénom du candidat

---



---

- 2) étude de  $f_m$  pour  $m > 1$  : (distinguer  $m$  pair et  $m$  impair)
- continuité et dérivabilité en 0
  - limites et comportement asymptotique
  - dérivée et tableaux de variation
- 3) montrer que les courbes  $C_1$  et  $C_2$  ont trois points communs dont on détermine les coordonnées
- 4) étudier la position relative de  $C_m$  et  $C_{m+1}$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$
- 5) construire  $C_1$  et  $C_2$  dans un même repère orthonormé (unité: 2cm)

IV) 1) résoudre et discuter l'équation

$$e^x + \frac{1}{e^x} = 2m \quad \text{avec } m \text{ paramètre réel}$$

- 2) soit l'équation différentielle  $y'' + 2y' + 5y = 0$   
déterminer la solution  $f$  dont la courbe représentative dans un repère orthonormé passe par l'origine et qui admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1
- 3) on jette trois dés cubiques de couleurs différentes; combien y a-t-il:
- de résultats possibles
  - de résultats comportant un seul 4
  - de résultats comportant exactement deux 4
  - de résultats ne comportant aucun 6
  - de résultats comportant trois 5
- 4) soit  $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$
- calculer  $I_1$
  - calculer  $I_{n+1}$  en fonction de  $I_n$
  - en déduire  $I_2$

répartition des points : 12 ; 14 ; 18 ; 16

Francis Scholtes  
LTKL