

EXERCICES SUR LES POLYNOMES ET LES FRACTIONS RATIONNELLES

I) Effectuez les opérations suivantes :

$$1) \left(5x^4 - 6x^3 + 4,5x - \frac{2}{3} \right) + \left(13x^3 - \frac{3}{7}x^2 + 0,7x + \frac{3}{5} \right) =$$

$$2) \left(7x^5 - \frac{8}{9}x^3 + x^2 - x + 7,6 \right) - \left(-7x^5 + \sqrt{2}x^4 - 6x^3 + \frac{4}{11}x^2 + \pi \right) =$$

$$3) (5x - 7) \left(\frac{2}{7}x^2 - x + 9 \right) =$$

$$4) (2x^5 - 13x^4 + 23x^3 + 3x^2 - 53x + 63) \div (2x - 7) =$$

$$5) (5x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 12) \div (x^2 - 2x + 5) =$$

$$6) (x^4 - 3x^2 + 5x - 3) \div (x - 1) =$$

$$7) \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 5,6 \right) \div (x + 3) =$$

$$8) (-x^4 + 8x^3 - 7x) \div (x - 2) =$$

$$9) (x - 3 + \sqrt{2})(x + 3 - \sqrt{2}) + (4x^2 - x + 1)^2 =$$

$$10) (5x - 1)^3 - 5x(x + 1)^2 - (x + 4)(x - 2) =$$

$$11) (-3x^2 + 2)^2 - (5x + 7)^2 + 9 - x^4 =$$

$$12) (x^4 + 2)^3 - (7x^4 - 1)^2 =$$

II) Déterminez le degré des polynômes suivants (sans effectuer tous les calculs !) :

$$1) (x^5 - 3x^4 + 7x - 6)^2 \qquad 2) (7x^2 - 5x + 17)(-9x^4 + 32x^2 - 4x + 8)$$

$$3) (5x - 17)(-19x + 1)(3x^2 - 45) \qquad 4) (x^4 + x + 1)(x^6 - 1) - (x^{10} + 1)$$

$$5) (-5x^3 - x^2 + 14)^4 \qquad 6) (3x - 8)^2(8x^5 - 18)(6 - 7x^4)^3$$

$$7) x^6 \left(x + \frac{1}{x^2} \right) \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)$$

III) Résolvez les équations et les inéquations suivantes :

$$1) 3x^3 - 11x^2 + 9x - 1 = 0$$

$$2) 3x^3 - 16x^2 - 9x + 70 = 0$$

$$3) 2x^5 - 7x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 6x \geq 0$$

$$4) 5x^6 - 15x^5 - 45x^4 + 10x^3 < 0$$

$$5) x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 26x + 120 = 0$$

$$6) 8x^3 - 125 \leq 0$$

$$7) -21x^4 - 5x^3 + 26x^2 + 5x - 5 = 0$$

$$8) x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$9) x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 9x + 12 \leq 0$$

$$10) x^6 + 4x^5 + 3x^4 = 3x^2 + 12x + 9$$

$$11) x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 8 \geq 3 - 4x$$

IV) Simplifiez les fractions rationnelles suivantes :

$$1) \frac{3x^2 - 12x + 12}{12 - 6x}$$

$$2) \frac{11x^3 + 68x - x^4 - 42x^2 - 40}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$3) \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} - \frac{2}{1-x^2}$$

$$4) \frac{x^2 - 6x + 9}{5 - 2x} \div \frac{2x - 6}{4x^2 - 20x + 25}$$

$$5) \frac{x+3}{x^2 - 3x + 2} - \frac{7+x}{x^2 - 4x + 3}$$

$$6) \frac{2x + \sqrt{5}}{x - 2\sqrt{5}} - \frac{x\sqrt{5} + 10}{20 - x^2}$$

V) Exercices posés aux olympiades mathématiques.

- 1) Si $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$ et que $f(-3) = 2$, que vaut $f(3)$?
- 2) Si $x \oplus y$ représente $(x + y)^2$ et si $x \ominus y$ représente $(x - y)^2$, que représente $(x \oplus y) \ominus (x \ominus y)$?
- 3) Que vaut $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$?
 - (a) $a^4 + 6a^3 + 12a^2 + 6a + 1$
 - (b) $(a^2 + 3a + 1)^2$
 - (c) $a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a + 7$
 - (d) $[(a+1)(a+2)]^2$
 - (e) $[a(a+3)]^2 + 1$
- 4) Que le trinôme $y^2 + my + 2$ soit divisé par $y+1$ ou par $y-1$, le reste est le même. Que vaut le réel m ?
- 5) Dans le développement de l'expression $\left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^2$, que vaut le terme indépendant de x ?
- 6) Quel est le nombre de solutions de l'équation $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$?
- 7) Pour combien de valeurs du réel a le polynôme $x^2 + ax + 12$ a-t-il ses deux racines dans \mathbb{Z} ?
- 8) Que vaut $2b - a$ si 1 et 2 sont racines de l'équation $2x^2 - ax + b = 0$?
- 9) Le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $x + 3$ est 2 ; celui de la division par $x - 4$ est 42. Quel est le reste de la division de $P(x)$ par $(x + 3)(x - 4)$?
- 10) Soit $x > 0$ tel que $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 7$. Que vaut $x^3 + \frac{1}{x^3}$?
- 11) Que vaut le reste de la division de $\left(\left((x-1)^2 - 1\right)^3 - 1\right)^2$ par $x - 1$?
- 12) Si deux nombres ont pour somme $s = 1$ et pour produit $p = -1$, que vaut la somme de leurs cubes ?
- 13) Voici 5 polynômes à coefficients réels. Lequel est divisible à la fois par $x - 3$ et par $x + 3$?
 - (a) $x^3 - 27$
 - (b) $x^3 - 9$
 - (c) $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$
 - (d) $x^3 + 27$
 - (e) $x^3 + 5x^2 - 9x - 45$
- 14) Quel est l'ensemble de tous les réels x pour lesquels $x + \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ prend une valeur rationnelle ?